



**SYSTEMES DE NUMERISATION HAUTES  
PERFORMANCES- Etude des solutions à bancs de  
filtres hybrides – Caractérisation et optimisation -**  
Tudor Petrescu

► **To cite this version:**

Tudor Petrescu. SYSTEMES DE NUMERISATION HAUTES PERFORMANCES- Etude des solutions à bancs de filtres hybrides – Caractérisation et optimisation -. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Paris Sud - Paris XI, 2006. Français. NNT: . tel-00274217

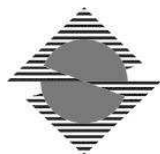
**HAL Id: tel-00274217**

**<https://theses.hal.science/tel-00274217>**

Submitted on 17 Apr 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° D'ORDRE :

**UNIVERSITÉ PARIS XI  
UFR SCIENTIFIQUE D'ORSAY**

**THÈSE**

**présentée pour obtenir**

**le GRADE de DOCTEUR en SCIENCES  
de l'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY**

**par**

**Tudor Gabriel PETRESCU**

**Sujet :**

**SYSTÈMES DE NUMÉRISATION HAUTES  
PERFORMANCES**

**- Étude des solutions à bancs de filtres hybrides -  
- Caractérisation et optimisation -**

**Soutenue le 24 mars 2006 devant la commission d'examen :**

Mme ARNDT Marylin

M. BÉNABÈS Philippe

M. DUHAMEL Pierre

M. GARDA Patrick

M. HÉLARD Jean-François    Rapporteur

M. LOUMEAU Patrick        Rapporteur

M. OKSMAN Jacques



---

*À Raluca pour sa patience et son amour*



---

## REMERCIEMENTS

Le travail de thèse a été réalisé dans le département Signaux et Systèmes Électroniques de l'École Supérieure d'Électricité. Ma reconnaissance s'adresse à Monsieur Jacques Oksman, chef du département pour son accueil, sa disponibilité et ses excellents conseils sur le plan technique et sur le plan humain.

Je remercie Monsieur Jean-François Héliard, professeur à l'Institut National des Sciences Appliquées de Rennes et Monsieur Patrick Loumeau, maître de conférence à l'École Nationale Supérieure des Télécommunications d'avoir accepté de juger ce travail en qualité de rapporteurs. Je remercie également Madame Marylin Arndt, ingénieur R&D à France Télécom, Monsieur Pierre Duhamel directeur de recherche au Laboratoire des Signaux et Systèmes (LSS/CNRS) et Monsieur Patrick Garda, professeur à l'Université Pierre et Marie Curie d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie Monsieur Philippe Bénabès, mon directeur de thèse et professeur au département Signaux et Systèmes Électroniques pour toute son aide.

J'aimerais aussi remercier Messieurs Michel Barret, Jean-Luc Colette, Gilles Fleury, Richard Kielbasa, Daniel Poulton, professeurs à l'École Supérieure d'Électricité pour leurs conseils tout au long de la thèse.

Je tiens à remercier Caroline Lelandais-Perrault pour son excellente collaboration et ses conseils.

Un grand merci à Mademoiselle Fabienne Suraud pour son extrême gentillesse, sa grande disponibilité et sa bonne humeur.

Je remercie tout particulièrement mes professeurs de l'Université Polytechnique de Bucarest pour m'avoir transmis leur expérience et leur savoir dans ce domaine.

Le travail de la thèse n'aurait pas été possible sans l'ambiance qui règne généralement à Supélec, merci donc pour cela à : Stefan (pour la qualité de ses photos et bien sûr pour les fameux gâteaux), Sorore (pour le soutien moral), Esmaeil (pour le thé et les dattes), Émilie (pour ses poivrons farcis), Ali (pour les indispensables cours de libanais), Cristina (pour les services de taxi), Jérôme (combien de pages?), Éric (Hugues!), Davud (pour les débats politiques), Alexia et Yoan (pour leur bonne humeur).

Finalement je dédie cette thèse à ma sœur et mes parents pour leur soutien en toutes circonstances et à la mémoire de mes grands-parents.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>La numérisation à hautes performances</b>	<b>5</b>
2.1	Besoins . . . . .	5
2.1.1	Besoins applicatifs . . . . .	5
2.1.2	Besoins en termes de performances . . . . .	7
2.2	Solutions potentielles . . . . .	14
2.2.1	Décomposition temporelle . . . . .	15
2.2.2	Décomposition fréquentielle . . . . .	17
2.2.3	Intérêt de la solution BFH . . . . .	20
2.3	Études actuelles sur les BFH . . . . .	23
2.3.1	Théorie des BFH . . . . .	24
2.3.2	Méthodes de synthèse classiques . . . . .	32
2.3.3	Critères d'évaluation d'un banc de filtres hybrides . . . . .	34
2.3.4	Conclusion . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Méthodes de synthèse de BFH adaptées aux contraintes de réalisation</b>	<b>37</b>
3.1	Filtres analogiques envisageables . . . . .	38
3.1.1	Exemples de réalisation des résonateurs . . . . .	39
3.1.2	Hypothèse sur les filtres d'analyse . . . . .	43
3.2	Intérêt d'un faible sur-échantillonnage du signal d'entrée . . . . .	44
3.2.1	Influence d'un faible sur-échantillonnage du signal d'entrée sur les performances des BFH . . . . .	44
3.2.2	Utilisation d'un faible sur-échantillonnage dans le processus de synthèse des BFH . . . . .	46



3.3	Méthodes exploitant l'échantillonnage de la réponse fréquentielle . . .	48
3.3.1	Utilisation de la transformée de Fourier inverse (TFI) . . . . .	48
3.3.2	Approximation locale aux moindres carrés (ALMC) . . . . .	53
3.3.3	Approximation globale aux moindres carrés (AGMC) . . . . .	57
3.4	Méthode d'approximation continue (AC) . . . . .	66
3.5	Méthodes d'amélioration . . . . .	71
3.5.1	Méthodes d'amélioration des filtres de synthèse . . . . .	71
3.5.2	Méthodes d'amélioration des filtres d'analyse . . . . .	75
3.6	Éléments de comparaison . . . . .	79
3.7	Simulation temporelle . . . . .	81
<b>4</b>	<b>Caractérisation et optimisation des bancs de filtres hybrides</b>	<b>84</b>
4.1	Bruit de quantification dans les bancs de filtres hybrides . . . . .	84
4.2	Sensibilité des bancs de filtres hybrides . . . . .	90
4.2.1	Effet de la représentation en virgule fixe des coefficients des filtres numériques . . . . .	90
4.2.2	Sensibilité des bancs de filtres hybrides aux erreurs d'implémen- tation analogique . . . . .	94
4.3	Calibration des bancs de filtres hybrides . . . . .	105
4.3.1	Approche de calibration . . . . .	105
4.3.2	Effet du bruit de quantification sur la calibration . . . . .	109
4.3.3	Amélioration de la méthode de calibration . . . . .	114
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>118</b>
5.1	Dimensionnement d'un CAN à BFH . . . . .	118
5.2	Bilan . . . . .	122
<b>A</b>	<b>Conversion analogique/numérique classique - Rappel des caractéris- tiques et état de l'art</b>	<b>126</b>
<b>B</b>	<b>Calcul des filtres de synthèse pour un BFH à reconstruction parfaite (exemple 1)</b>	<b>129</b>
<b>C</b>	<b>Calcul du SFDR pour un banc de filtres hybride à temps continu</b>	<b>134</b>
C.1	Erreurs de gain et de phase . . . . .	135
C.2	Erreurs de décalage . . . . .	144

<b>D Caractéristiques des bancs d'analyse utilisés pour les simulations</b>	<b>146</b>
<b>Abbréviations et notations</b>	<b>151</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>153</b>
<b>Résumé</b>	<b>162</b>
<b>Abstract</b>	<b>163</b>

# Table des figures

2.1	Conversion analogique/numérique idéale . . . . .	7
2.2	Fréquence d'échantillonnage minimale ( $f_e^{(min)}$ ) en fonction de la fréquence maximale ( $f_{max}$ ) . . . . .	8
2.3	Limitations de la résolution en fonction de la fréquence d'échantillonnage	10
2.4	Modélisation du bruit thermique dans une résistance $R$ . . . . .	12
2.5	Focalisation spectrale . . . . .	14
2.6	Structure parallèle pour CAN . . . . .	15
2.7	Convertisseur à entrelacement temporel - schéma fonctionnel . . . . .	16
2.8	Signaux de commande des échantillonneurs dans un convertisseur à entrelacement temporel . . . . .	16
2.9	Convertisseur à entrelacement temporel - schéma de principe . . . . .	17
2.10	Banc de filtres hybride à temps discret . . . . .	18
2.11	Banc de filtres hybride à temps continu . . . . .	19
2.12	Spectre du signal d'entrée pour l'exemple 1 . . . . .	29
2.13	Spectres des décalés du signal d'entrée $X(j\Omega - j2\pi p/MT)$ pour l'exemple 1 . . . . .	29
3.1	Résonateur Gm-LC . . . . .	39
3.2	Principe du gyrateur . . . . .	40
3.3	Résonateur Gm-C - circuit I . . . . .	40
3.4	Résonateur Gm-C - circuit II . . . . .	41
3.5	Module de l'impédance d'une résonateur BAW . . . . .	42
3.6	Exemple de module de la réponse fréquentielle d'un filtre BAW . . . . .	42
3.7	Représentation schématique du spectre du signal d'entrée pour un échantillonnage à la fréquence de Nyquist (a), et pour un léger sur-échantillonnage (b) . . . . .	45

3.8	Distorsion - méthode TFI et paramètres du tableau 3.1 . . . . .	51
3.9	Module des fonctions de repliement $T_1(e^{j\omega})$ et $T_2(e^{j\omega})$ - méthode TFI et paramètres du tableau 3.1 . . . . .	51
3.10	Module des fonctions de repliement $T_3(e^{j\omega})$ et $T_4(e^{j\omega})$ - méthode TFI et paramètres du tableau 3.1 . . . . .	52
3.11	Repliement total - méthode TFI et paramètres du tableau 3.1 . . . .	52
3.12	Distorsion - méthode ALMC et paramètres du tableau 3.5. En trait pointillé: $\eta_X = 1$ . En trait plein: $\eta_X = 0.9$ . . . . .	55
3.13	Repliement total - méthode ALMC et paramètres du tableau 3.5. En trait pointillé: $\eta_X = 1$ . En trait plein: $\eta_X = 0.9$ . . . . .	56
3.14	Distorsion - méthode ALMC et paramètres du tableau 3.7. En trait pointillé: $\eta_X = 1$ . En trait plein: $\eta_X = 0.9$ . . . . .	57
3.15	Repliement total - méthode ALMC et paramètres du tableau 3.7. En trait pointillé: $\eta_X = 1$ . En trait plein: $\eta_X = 0.9$ . . . . .	57
3.16	Distorsion - méthode AGMC et paramètres du tableau 3.9, Cas I: $\eta_S = 1$	63
3.17	Distorsion - méthode AGMC et paramètres du tableau 3.9, Cas II: $\eta_S = 0.93$ . . . . .	63
3.18	Module des fonctions de repliement $T_1(e^{j\omega})$ et $T_2(e^{j\omega})$ - méthode AGMC et paramètres du tableau 3.9. . . . .	64
3.19	Module des fonctions de repliement $T_3(e^{j\omega})$ et $T_4(e^{j\omega})$ - méthode AGMC et paramètres du tableau 3.9. . . . .	64
3.20	Repliement total - méthode AGMC et paramètres du tableau 3.9. . .	65
3.21	Distorsion - méthode AC et paramètres du tableau 3.13. En trait poin- tillé: $\eta_X = 1$ . En trait plein: $\eta_X = 0.9$ . . . . .	69
3.22	Repliement total - méthode AC et paramètres du tableau 3.13. En trait pointillé: $\eta_X = 1$ . En trait plein: $\eta_X = 0.9$ . . . . .	69
3.23	Distorsion - méthode AGMC et paramètres du tableau 3.20 - en trait pointillé: sans optimisation des filtres d'analyse - en trait plein: avec optimisation . . . . .	77
3.24	Module des fonctions de repliement $T_1(e^{j\omega})$ et $T_2(e^{j\omega})$ - en trait poin- tillé: sans optimisation des filtres d'analyse - en trait plein: avec opti- misation . . . . .	77

3.25	Module des fonctions de repliement $T_3(e^{j\omega})$ et $T_4(e^{j\omega})$ - en trait pointillé: sans optimisation des filtres d'analyse - en trait plein: avec optimisation . . . . .	78
3.26	Repliement total - en trait pointillé: sans optimisation des filtres d'analyse - en trait plein: avec optimisation . . . . .	78
3.27	Module des filtres d'analyse - en trait pointillé: sans optimisation des filtres d'analyse - en trait plein: avec optimisation - paramètres du tableau 3.20 . . . . .	79
3.28	Différence entre les signaux d'entrée et de sortie dans le cas d'un BFH synthétisé par AGMC, $\eta_S = 1$ . . . . .	82
3.29	Différence entre les signaux d'entrée et de sortie dans le cas d'un BFH synthétisé par AGMC, $\eta_S = 0.93$ (même échelle que dans la figure 3.28)	83
3.30	Différence entre les signaux d'entrée et de sortie dans le cas d'un BFH synthétisé par AGMC, $\eta_S = 0.93$ - détail de la figure 3.29 . . . . .	83
4.1	Modèle linéaire du quantificateur utilisé pour l'analyse du bruit de quantification . . . . .	85
4.2	Le bruit de quantification est sur-échantillonné et filtré sur chaque voie du BFH . . . . .	85
4.3	Module des filtres de synthèse . . . . .	86
4.4	Niveau de bruit de quantification pour 8, 10, 12, 14 et 16 bit de quantification. Simulation pour des bancs de filtres à $M = 2, 3, 4, 6$ et 8 voies . . . . .	89
4.5	Modules des filtres de synthèse utilisés pour les simulations de bruit de quantification du BFH . . . . .	89
4.6	Influence de la quantification des coefficients des filtres de synthèse sur le module de la première fonction de repliement d'un BFH . . . . .	93
4.7	Modules des filtres d'analyse de type résonateurs d'ordre 2 idéaux (trait continu) et affectés par des erreurs analogiques (trait pointillé) - $\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.1$ et $\varepsilon_{C_m} = 0.01$ . . . . .	96
4.8	Module de la première fonction de repliement d'un BFH à huit voies dans 3 cas: Cas 1 - BFH affecté par $\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.1$ et $\varepsilon_{C_m} = 0.01$ , Cas 2 - BFH affecté par $\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.01$ et $\varepsilon_{C_m} = 0.005$ , et Cas 3 - BFH idéal. Le banc d'analyse est le «Banc1» . . . . .	99

4.9	Module de la fonction de distorsion d'un BFH à huit voies dans 3 cas : Cas 1 - BFH affecté par $\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.1$ et $\varepsilon_{C_m} = 0.01$ , Cas 2 - BFH affecté par $\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.01$ et $\varepsilon_{C_m} = 0.005$ , et Cas 3 - BFH idéal. Le banc d'analyse est le «Banc1» . . . . .	100
4.10	Évolution de la première fonction de repliement d'un BFH à huit voies sur 40 essais Monte Carlo - BFH affecté par $\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.1$ et $\varepsilon_{C_m} = 0.01$ . Le banc d'analyse est le «Banc1» . . . . .	100
4.11	Filtre Butterworth d'ordre 3 utilisé dans l'étude de la sensibilité des BFH	101
4.12	Modules des filtres d'analyse de type Butterworth d'ordre 3 idéaux (trait continu) et affectés par des erreurs analogiques (trait pointillé) - $\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.1$ et $\varepsilon_{C_m} = 0.01$ . . . . .	103
4.13	Banc de filtres hybride . . . . .	106
4.14	Module de la première fonction de repliement d'un BFH à huit voies en trois cas -BFH idéal, BFH affecté par $\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.1$ et $\varepsilon_{C_m} = 0.01$ et BFH affecté par les erreurs analogiques et calibré. Paramètres de la simulation - donnés au tableau 4.8. La quantification se fait sur 16 bit.	114
4.15	Module de la fonction de distorsion d'un BFH à huit voies en trois cas -BFH idéal, BFH affecté par $\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.1$ et $\varepsilon_{C_m} = 0.01$ et BFH affecté par les erreurs analogiques et calibré. Paramètres de la simulation - donnés au tableau 4.8. La quantification se fait sur 16 bit.	115
4.16	Détail de la figure 4.15 . . . . .	115
4.17	Module de la première fonction de repliement d'un BFH à huit voies en quatre cas -BFH idéal, BFH affecté par $\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.1$ et $\varepsilon_{C_m} =$ $0.01$ et BFH affecté par les erreurs analogiques et calibré par les deux méthodes. Paramètres de la simulation - donnés au tableau 4.8. . . .	117
5.1	Objectif de conversion . . . . .	118
5.2	Organigramme de conception d'un BFH . . . . .	119
B.1	Banc de filtres continus . . . . .	129
D.1	Module des fonctions de transfert des filtres du banc d'analyse « Banc1 »	147
D.2	Module des fonctions de transfert des filtres du banc d'analyse « Banc2 »	148
D.3	Module des fonctions de transfert des filtres du banc d'analyse passe- bas « Banc3 » . . . . .	149

D.4	Module des fonctions de transfert des filtres du banc d'analyse passe-	
	bande « Banc4 » . . . . .	150

# Liste des tableaux

2.1	Les termes de repliement ayant des contributions non-nulles dans l'équation (2.34) appliquée à l'exemple 1 . . . . .	30
3.1	Paramètres pour une synthèse par TFI - « Banc1 » . . . . .	50
3.2	Performances du BFH synthétisé par la méthode TFI avec les paramètres du tableau 3.1 . . . . .	53
3.3	Paramètres pour une synthèse par TFI - « Banc2 » . . . . .	53
3.4	Performances du BFH synthétisé par la méthode TFI avec les paramètres du tableau 3.3 . . . . .	54
3.5	Paramètres pour une synthèse par ALMC - « Banc1 » . . . . .	55
3.6	Performances du BFH synthétisé par la méthode ALMC avec les paramètres du tableau 3.5 . . . . .	56
3.7	Paramètres pour une synthèse par ALMC - « Banc2 » . . . . .	56
3.8	Performances du BFH synthétisé par la méthode ALMC avec les paramètres du tableau 3.7 . . . . .	58
3.9	Paramètres pour une synthèse par AGMC - « Banc1 » . . . . .	62
3.10	Performances du BFH synthétisé par la méthode AGMC avec les paramètres du tableau 3.9. . . . .	65
3.11	Paramètres pour une synthèse par AGMC - « Banc2 » . . . . .	65
3.12	Performances du BFH synthétisé par la méthode AGMC avec les paramètres du tableau 3.11 . . . . .	66
3.13	Paramètres pour une synthèse par AC - « Banc3 » . . . . .	68
3.14	Performances du BFH synthétisé par la méthode AC avec les paramètres du tableau 3.13 . . . . .	70
3.15	Paramètres pour une synthèse par AGMC - « Banc3 » . . . . .	70



3.16 Performances du BFH synthétisé par la méthode AGMC avec les paramètres du tableau 3.15 . . . . .	70
3.17 Valeurs du critère (3.67) pour différentes longueurs des dénominateurs et numérateurs des filtres RII. $L + R = 128$ . . . . .	74
3.18 Paramètres pour une synthèse par ALMC et amélioration des filtres de synthèse . . . . .	74
3.19 Performances du BFH synthétisé par la méthode ALMC puis amélioré par la méthode d'amélioration des filtres de synthèse avec les paramètres du tableau 3.18 . . . . .	75
3.20 Paramètres pour une synthèse par AGMC et optimisation des filtres d'analyse . . . . .	76
3.21 Performances du BFH synthétisé par la méthode de l'approximation globale au moindres carrés puis amélioré par la méthode d'optimisation des filtres d'analyse avec les paramètres du tableau 3.20. . . . .	79
3.22 Comparaison des méthodes d'échantillonnage de la réponse fréquentielle	80
4.1 Bruit de quantification pour les BFH . . . . .	88
4.2 Paramètres de simulation de l'effet de la représentation en virgule fixe	92
4.3 Performances des BFH en présence d'erreurs de quantification des coefficients des filtres de synthèse . . . . .	94
4.4 Paramètres de simulation de l'effet des erreurs analogiques . . . . .	95
4.5 Influence du nombre de voies sur la sensibilité des BFH - simulation pour $\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.1$ et $\varepsilon_{C_m} = 0.01$ avec des résonateurs . . . . .	97
4.6 Sensibilité d'un BFH à huit voies aux erreurs d'implémentation des filtres analogiques. Le banc d'analyse est constitué de résonateurs . .	98
4.7 Sensibilité d'un BFH à 4 voies aux erreurs d'implémentation des filtres analogiques. Le banc d'analyse est constitué de filtres Butterworth d'ordre 3. Comparaison à un BFH réalisé avec des résonateurs . . . .	102
4.8 Paramètres de simulation pour la méthode de calibration . . . . .	112
4.9 Performances d'un BFH à huit voies affecté par des erreurs de réalisation avant et après la calibration. Paramètres de la simulation - donnés au tableau 4.8. La quantification se fait sur 16 bit. . . . .	113

---

# Chapitre 1

## Introduction

Les besoins des systèmes de communication tendent vers un élargissement des bandes, une augmentation des débits et plus de versatilité. Ces caractéristiques doivent être prises en compte tout au long d'une chaîne de réception et particulièrement à l'interface entre le monde analogique et le monde numérique. Les techniques de conversion analogique/numérique actuelles ne permettent pas de répondre aux besoins futurs. En effet, on constate que les convertisseurs dont les fréquences d'échantillonnage sont les plus élevées ont des résolutions en nombre de bits trop limitées et que les convertisseurs les plus précis travaillent à des cadences trop faibles. Les progrès des technologies vont certes vers une augmentation des fréquences d'échantillonnage et des résolutions en bit mais il semble indispensable de réfléchir à de nouvelles architectures intrinsèquement plus rapides et plus précises. De plus, afin de répondre au mieux aux besoins de la conversion du futur, il faut envisager des systèmes qui soient capables de s'adapter aux différents types de signaux à convertir. Pour cela, il faudra pouvoir modifier dynamiquement les caractéristiques de ces systèmes, c'est ce qu'on appelle la versatilité.

Ce travail a pour objectif d'étudier un dispositif qui, pour une cadence d'échantillonnage donnée, permette d'élargir la bande de fréquence de conversion analogique/numérique et dont les caractéristiques soient modifiables. L'orientation choisie est celle des structures parallèles et en particulier des bancs de filtres hybrides (BFH). Le principe des BFH repose sur une décomposition fréquentielle du signal en plusieurs sous-bandes via un banc de filtres analogiques appelé banc d'analyse. Pour chaque sous-bande, le signal est numérisé à l'aide d'un convertisseur analogique/numérique classique à une cadence plus faible que la fréquence de Nyquist du signal d'entrée

---

du BFH. Enfin, un banc de filtres numériques appelé banc de synthèse recompose les signaux en un signal que l'on souhaite le plus proche possible du signal d'entrée du BFH qui serait échantillonné à la fréquence de Nyquist. Une telle architecture permet d'élargir la bande de conversion à partir d'une cadence d'échantillonnage donnée.

Ces études ont été effectuées au cours des thèses de Caroline Lelandais-Perrault et Tudor Petrescu menées en partie en collaboration. Elles font partie d'un projet plus vaste sur les systèmes de numérisation du futur, ce qui a permis d'échanger des idées et des résultats avec des chercheurs d'autres équipes (P. Duhamel du LSS, M. Barret et J-L. Collette de Supélec à Metz) et d'aboutir à des publications communes. Ces systèmes à BFH sont aussi une des trois architectures qui vont faire l'objet du projet RNRT intitulé « VersaNUM » labellisé en septembre 2005.

Notre travail a abouti à de nouvelles méthodes de synthèse de BFH, une extension de leurs fonctionnalités et une étude de leur sensibilité par rapport aux imperfections de réalisation. Ces résultats sont détaillés ci-après (les initiales de l'auteur principal sont précisées entre parenthèses).

La particularité des méthodes de synthèse de BFH développées ici est qu'elles prennent en compte les contraintes de réalisation des filtres analogiques. En effet elles partent d'un banc d'analyse quelconque mais supposé connu. Elles calculent alors un banc de synthèse composé de filtres numériques. Il y a tout d'abord les méthodes exploitant l'échantillonnage de la réponse fréquentielle : celle qui utilise la transformée de Fourier inverse (TP), la méthode d'approximation locale aux moindres carrés (CLP) et la méthode d'approximation globale aux moindres carrés (TP). Une autre classe de méthodes repose sur la minimisation d'un critère continu soit la méthode d'approximation continue (CLP). D'autres méthodes permettent d'obtenir des filtres de synthèse à réponse impulsionnelle infinie (CLP en collaboration avec D. Sillion, stagiaire à Supélec). De plus, à partir d'un BFH calculé par l'une des méthodes précédentes, on peut chercher à optimiser les bancs d'analyse et/ou les bancs de synthèse (TP).

Un autre résultat est l'extension de la théorie des BFH passe-bas au cas passe-bande (CLP). On montre notamment comment les méthodes de synthèse des BFH passe-bas peuvent être transposées au cas passe-bande.

Toujours dans le cadre de l'extension des fonctionnalités des BFH, un atout des BFH est leur versatilité potentielle offerte par le banc de synthèse. En effet, les filtres de synthèse étant numériques, leurs coefficients peuvent donc être modifiés en fonc-

---

tion des besoins. Nous avons exploité cette idée et obtenu une méthode qui permet d'améliorer la résolution potentielle dans une bande de fréquence restreinte (CLP).

Enfin, nous avons étudié l'influence de la quantification (du signal et des coefficients des filtres de synthèse) ainsi que la sensibilité vis-à-vis des imperfections de l'analogique (TP). Les BFH s'avèrent très sensibles à ces imperfections. Ce problème majeur a donc engendré des recherches sur les solutions possibles. Pour pallier le problème de sensibilité, une méthode de calibration a été mise au point.

### **Organisation du rapport :**

Nous avons choisi de poursuivre notre collaboration dans l'écriture de nos mémoires de thèse. Nos deux manuscrits se composent donc d'une partie commune (l'introduction, les chapitres 2 et 3 et la conclusion) et d'une partie qui est propre à chacun (chapitre 4). En ce qui concerne la partie commune, nous nous en sommes partagé la rédaction. Dans le résumé des chapitres qui suit, les initiales du rédacteur sont citées entre parenthèses.

Le chapitre 2 présente les besoins en termes d'applications qui amènent à reconsidérer les techniques de conversion analogique/numérique. Les performances souhaitées pour ces futurs systèmes de numérisation sont présentées (CLP). Les solutions potentielles de type structures parallèles sont expliquées. Puis le rapport se focalise sur les BFH dont les bases théoriques et les méthodes de synthèse classiques sont résumées (TP).

Le chapitre 3 présente nos méthodes de conception des BFH. Tout d'abord, nous énumérons les possibilités de réalisation des filtres analogiques du banc d'analyse qui nous ont amenés à choisir les caractéristiques des bancs d'analyse (CLP). Ensuite, nous exposons les méthodes de synthèse des BFH développées et les résultats (CLP,TP).

Le chapitre 4 de la thèse de Tudor Petrescu traite de la sensibilité des BFH par rapport aux erreurs de réalisation des filtres analogiques et numériques. Le bruit de quantification total d'un convertisseur analogique numérique implémenté en structure BFH est étudié. Une méthode de calibration des filtres numériques visant à compenser les erreurs d'implémentation de l'analogique est présentée et ses performances sont étudiées.

Le chapitre 4 de la thèse de Caroline Lelandais-Perrault étend les fonctionnalités des BFH afin de mieux répondre aux besoins exprimés dans le chapitre 2. Tout d'abord, nous présentons l'extension des méthodes de synthèse de BFH au cas passe-

---

bande. Nous montrons ensuite la capacité des BFH à effectuer une focalisation spectrale. Les méthodes de synthèse pour obtenir des filtres à réponse impulsionnelle infinie sont exposées.

Pour conclure, nous proposons une méthodologie de conception de BFH qui met en oeuvre nos résultats. Enfin, après un bilan de notre travail, nous présentons les perspectives ouvertes par cette étude dans le domaine des systèmes de numérisation.

---

## Chapitre 2

# La numérisation à hautes performances

### 2.1 Besoins

#### 2.1.1 Besoins applicatifs

Au début des années 1990, la fin de la guerre froide a amené la défense américaine à réorganiser ses activités de radiocommunications. Constatant la très grande diversité et l'incompatibilité des systèmes radio utilisés par les militaires, le DOD (Department Of Defense) initia le concept de Radio Logicielle [53]. Il s'agissait alors d'étudier des systèmes étant capables de s'adapter à différentes fréquences, différentes modulations, différentes normes. À en croire le nombre très important de publications sur le sujet, cette idée a été adoptée sur le plan international aussi bien dans le monde académique qu'industriel, ceci pour des applications de télécommunication plus générales, dont les applications commerciales. Les applications de la radio logicielle auront un impact important sur nos modes de communication personnels, et aussi sur l'industrie, tous domaines confondus. En effet, les souscripteurs de services disposeront d'un système compatible à l'international, d'une plus grande flexibilité dans les services et donc d'une plus grande faculté de personnalisation de ces services. Les opérateurs pourront développer de nouveaux produits plus complets et plus personnalisés plus rapidement qu'aujourd'hui. Les fabricants de terminaux et de stations de base profiteront des économies d'échelle et d'une production plus flexible. Pour ce faire, on imagine dans la littérature le téléchargement de nouveaux logiciels dans le

terminal et la reconfiguration du matériel (FPGA [12]). Quant à la conversion analogique/numérique actuelle, des travaux effectués à l'occasion de cette thèse étudient comment réaliser une numérisation modifiable et adaptable en fonction du besoin.

Puis vint l'idée de la Radio Cognitive [55] qui est une extension de la radio logicielle. Aujourd'hui, dans les réseaux mobiles standards, le terminal mesure des paramètres qu'il transmet au réseau et reçoit des décisions en retour qu'il exécute. En radio cognitive, le terminal n'est plus seulement un système qui s'adapte aux ordres mais il est capable d'analyser son environnement et de prendre lui-même des décisions. Cette « intelligence » du terminal permet d'envisager une optimisation globale des ressources radio du réseau. Une tendance actuelle (ou future) de la radio logicielle (ou cognitive) est de choisir les caractéristiques d'un lien radio, en premier lieu la fréquence centrale, de façon optimale. À l'heure actuelle, les principaux efforts portent sur la détection d'éventuels « trous » dans le spectre disponible. Sur un exemple aussi simple, on conçoit bien que, pour optimiser réellement un tel choix, il faudrait effectuer une analyse spectrale dans la totalité de la bande a priori possible, ce qui impliquerait d'avoir pu numériser toute cette bande. Certes il existe des solutions à balayage, dont le principe est de faire varier l'oscillateur local pour convertir séquentiellement toute la bande. Mais cette solution peut poser problème si le signal est non stationnaire (par exemple l'UWB). D'autre part, cette solution ne prend en compte que la puissance du signal alors qu'il faudrait permettre des traitements moins triviaux que la simple mesure de puissance continue (c'est le cas du CDMA). Une conversion analogique/numérique large-bande permettrait une gestion plus flexible du spectre. On pourrait alors utiliser des algorithmes d'optimisation des ressources radio plus sophistiqués que ceux précédemment cités. Cette évolution technique pourrait favoriser une éventuelle dérégulation des fréquences dans le futur.

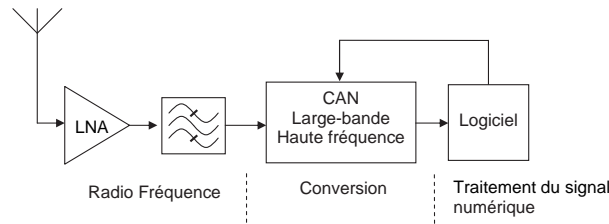
Enfin, les communications radio ne concernent plus uniquement les télécommunications comme le GSM ou l'UMTS par exemple. Elles sont utilisées dans de plus en plus de domaines afin d'offrir plus de services (GPS, Wifi, etc). Pourquoi ne pas imaginer une interface radio matérielle générique qui pourrait répondre à tous les besoins de communication radio possibles? Ceci engendrerait une économie d'échelle. Pour aboutir à cela, il faut encore imaginer la reconfigurabilité du logiciel des systèmes (téléchargement de nouveaux logiciels par le lien radio) et du matériel (configuration de FPGA par exemple). Quant à la numérisation du signal, la conversion analogique/numérique classique (en bande de base nécessitant une ou plusieurs trans-

position(s) en fréquence) ne répond pas à la question. Il faut là aussi réfléchir à la reconfigurabilité de la conversion analogique/numérique ce qui justifie pleinement notre étude.

En conclusion, ces applications futures ne pourront être implémentées que si les systèmes de numérisation acquièrent des caractéristiques et des possibilités de conversion large-bande versatiles.

### 2.1.2 Besoins en termes de performances

La plupart des auteurs étudiant la Radio Logicielle imaginent un convertisseur analogique/numérique idéal RF et large-bande [54], [83]. En effet, on a intérêt à numériser le signal le plus tôt possible dans la chaîne de réception afin d'économiser des étages de transposition de fréquence. De plus, pour répondre aux besoins de Radio Logicielle, on doit disposer d'un signal qui numérise la totalité de la bande. Enfin, il serait intéressant que l'on puisse paramétrer ce système de numérisation en fonction des besoins. Le convertisseur analogique/numérique idéal pourrait donc conduire à la chaîne de réception de la figure 2.1.



**Fig. 2.1** — *Conversion analogique/numérique idéale*

Le convertisseur idéal devra avoir des performances que nous pouvons classer dans trois catégories que sont l'aspect fréquentiel, les aspects de résolution et de consommation. De plus, on souhaite qu'il soit versatile.

#### Performances fréquentielles

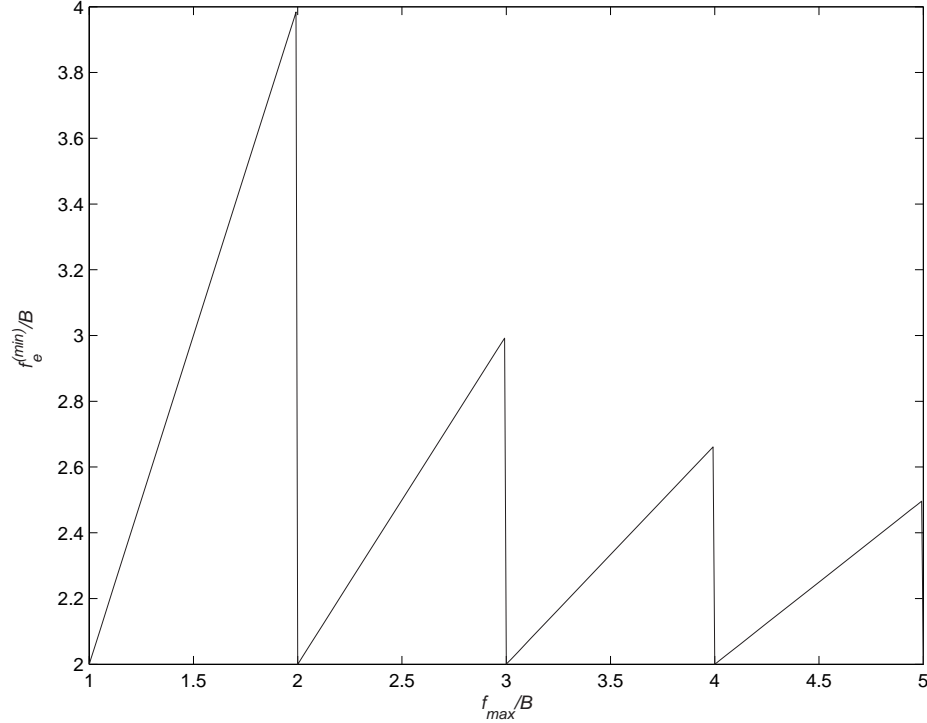
##### *Large-bande*

En prenant l'exemple de la téléphonie mobile dans le cadre de la radio logicielle, le convertisseur idéal devrait convertir la bande [500MHz-2GHz]. Si on considère que l'on est en large-bande dès lors que  $\Delta f/f_{centrale} > 0.25$ , alors il s'agit bien d'une conversion large-bande.



### Bande passante

La fréquence d'échantillonnage minimale d'un signal en bande de base couvrant la bande  $[0, B]$  est de  $2B$ . Dans le cas de signaux en bande passante compris entre  $f_{max} - B$  et  $f_{max}$ , la fréquence d'échantillonnage minimale dépend de la position de la bande dans le spectre [86]. La figure 2.2 représente la fréquence d'échantillonnage minimale en fonction de  $f_{max}$ .



**Fig. 2.2** – Fréquence d'échantillonnage minimale ( $f_e^{(min)}$ ) en fonction de la fréquence maximale ( $f_{max}$ )

On remarque que tant que  $f_{max}$  est inférieure à  $2B$ , la fréquence minimale d'échantillonnage vaut  $2f_{max}$ . Dès que  $f_{max}$  dépasse cette valeur, la fréquence d'échantillonnage minimale chute. Dans ce dernier cas, il est alors intéressant d'échantillonner en bande passante.

Dans le cas de la bande [500MHz-2GHz],  $f_{max}/B = 1.33$ , la fréquence d'échantillonnage minimale vaut  $2f_{max}$  soit 4 GHz. On ne peut donc pas tirer profit d'une numérisation en bande passante dans l'optique de minimiser la fréquence d'échantillonnage. Ceci est valable dans le cas d'une numérisation classique effectuée directement à la fréquence d'échantillonnage avec un seul convertisseur. Il serait intéressant

d'étudier si on peut réduire cette fréquence minimale d'échantillonnage grâce à de nouvelles architectures de systèmes de numérisation.

#### *Hautes fréquences*

L'élargissement des bandes s'accompagne d'une élévation des fréquences absolues. Les bandes d'entrée des convertisseurs devront donc augmenter. Il s'agit ici d'un aspect technologique qui concerne la partie échantillonneur-bloqueur des convertisseurs et qui ne fait pas partie de cette étude.

#### *Hauts débits*

Devant l'accroissement de quantité d'information à communiquer, les débits de données ne cessent de croître. Des débits allant jusqu'à 1Gbit/s sont envisageables. Ce besoin joue dans le même sens que l'élargissement des bandes passantes.

### **Résolution**

Toute application nécessite de travailler avec des signaux qui ont au moins une certaine précision afin d'obtenir les performances souhaitées. Les signaux doivent donc être numérisés à l'aide d'un convertisseur d'une précision au moins égale à celle exigée par l'application. La précision d'un convertisseur est évaluée en nombre de bits et appelée résolution. On définit plusieurs résolutions pour un même convertisseur. L'annexe A rappelle ces définitions. Pour la suite de ce paragraphe, nous nous intéressons à la résolution effective définie par la relation (A.2). Il s'agit de la résolution d'un convertisseur qui est limitée par les phénomènes de bruit. Plus généralement, pour un bruit blanc d'origine  $X$ , il correspond une résolution maximale  $N_X$  qui est liée à la puissance de ce bruit par la relation :

$$SNR_X(\text{dB}) = 6N_X \quad (2.1)$$

Si on calcule  $N_X$  pour chaque type de bruit, on peut ainsi identifier celui qui est le plus limitant.

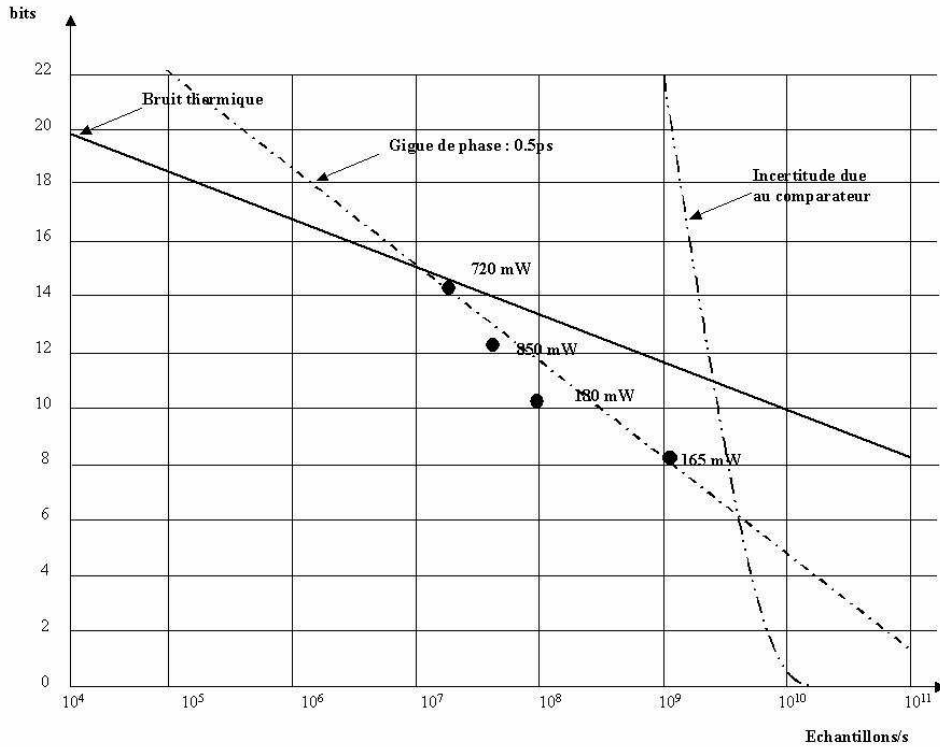
Plusieurs sources de bruits contribuent au bruit total. Tout d'abord la quantification qui engendre un bruit tel que le rapport signal sur bruit vaut  $6N$  dB où  $N$  est le nombre de bits de codage du convertisseur. Or, on choisit le nombre de bits de codage au cours de la conception en tenant compte d'autres phénomènes plus contraignants que sont [95]:

- le bruit thermique, que nous allons détailler plus loin ;

- l'incertitude sur les instants d'échantillonnage, c'est ce que l'on appelle la gigue de phase ;

- l'incertitude due au comparateur. Pour des niveaux très proches de la tension seuil, la sortie du comparateur rend une valeur intermédiaire qui n'est ni un niveau haut ni un niveau bas. Dans ce cas, la bascule qui suit le comparateur se mettra dans un état métastable qui deviendra soit un « 0 » soit un « 1 » au bout d'un temps  $\tau$  non prédictible [34] [97].

Un exemple de limitations dues à ces phénomènes est donné sur la figure 2.3 (extrait d'un document rédigé par une équipe de l'ENST sur la conversion analogique/numérique dans le cadre de l'action CNRS Radio Logicielle).



**Fig. 2.3** – Limitations de la résolution en fonction de la fréquence d'échantillonnage

On peut y voir que pour les fréquences les plus basses, le bruit thermique est le plus limitant. Puis, pour les fréquences de quelques dizaines de MHz à quelques GHz, l'influence de la gigue de phase est prépondérante. Au delà de 5 GHz, l'ambiguïté du comparateur l'emporte. Dans le domaine de fréquence [500MHz-2GHz], c'est donc la gigue de phase qui limite les performances des convertisseurs. En supposant que

les progrès technologiques parviennent à repousser cette limite, le bruit thermique pourrait redevenir le bruit prédominant.

*Influence du bruit thermique :*

Le bruit thermique est, par définition, celui qu'engendre l'agitation thermique des porteurs. Or, dans la littérature, on désigne parfois par bruit thermique le bruit fondamental qui est un ensemble de bruits engendrés par plusieurs causes [95]. Ce bruit fondamental se compose du véritable bruit thermique, du bruit de grenaille (ou shot noise) et du bruit en  $1/f$ .

Comme son nom l'indique, le bruit en  $1/f$  décroît en fonction de la fréquence et devient négligeable devant le bruit thermique pour les hautes fréquences (dans le pire cas à partir de 10 MHz). Ce bruit n'a donc pas d'impact sur les performances de notre application.

Le bruit de grenaille se crée dans les jonctions. C'est un bruit blanc indépendant de la température et proportionnel à la composante continue du courant. L'expression (2.2) donne la densité spectrale de courant.

$$S_i(f) = 2qI_{DC} \quad (2.2)$$

avec  $q = 1.6 \times 10^{-19}$  C.

On observe le bruit thermique uniquement dans les dispositifs résistifs. Les lois de la physique quantique permettent d'établir une bonne approximation de la densité spectrale de puissance de bruit émise par une résistance à la température  $T_K$  (relation (2.3)).

$$\gamma(f) \approx kT_K \quad (2.3)$$

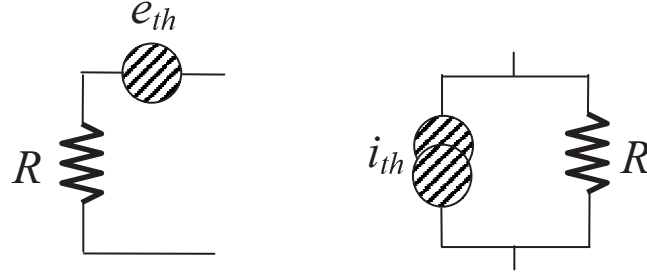
avec  $k = 1.38 \times 10^{-23}$  J.K<sup>-1</sup> et où  $T_K$  est la température en Kelvin.

On en déduit deux représentations possibles équivalentes du bruit thermique apporté par une résistance  $R$  dans un circuit (figure 2.4). La première de type Thévenin comporte une source de tension  $e_{th}$  générant un bruit blanc de densité spectrale (2.4) :

$$S_v(f) = 4kT_K R \quad (2.4)$$

La seconde de type Norton comporte une source de courant  $i_{th}$  générant un bruit blanc de densité spectrale (2.5) :

$$S_i(f) = 4kT_K / R \quad (2.5)$$



**Fig. 2.4** – *Modélisation du bruit thermique dans une résistance  $R$*

De la même manière, une jonction peut être modélisée par sa résistance dynamique en parallèle avec une source de courant  $i_{gr}$  qui fournit un bruit blanc de densité spectrale (2.2).

Sans la connaissance du circuit, il est donc impossible de donner la puissance totale du bruit fondamental. Toutefois, on peut dire que cette puissance ne pourra pas être inférieure à une valeur plancher causée par le bruit thermique dans un conducteur seul. La densité spectrale de puissance de bruit thermique donnée par l'expression (2.3) nous donne un plancher de bruit de -174 dBm à 290 K dans une bande de 1 Hz. La puissance de bruit thermique émise dans une bande  $B$  vaut :

$$P_{th} = kT_K B \quad (2.6)$$

Donc pour une fréquence d'échantillonnage de 3 Géch/s (ce qui permet d'échantillonner un signal de largeur de bande  $B = 1.5$  GHz), la puissance de bruit sur la totalité de la bande sera d'au moins -82 dBm. En considérant un signal à numériser de puissance +0dBm, la relation (2.1) conduit à une résolution  $N_{th}$  de 13.7 bit. Cette résolution est la meilleure performance que l'on puisse obtenir dans ces conditions. Cette considération permet ainsi de relier la largeur de bande souhaitée à la résolution maximale que l'on peut espérer.

## Consommation

L'élargissement des bandes de conversion conduit inévitablement à une augmentation de la consommation. Mais cela ne sera pas un frein au développement de tels systèmes si le rapport performance/consommation est satisfaisant. On peut citer l'exemple de l'UMTS qui, malgré une augmentation de la consommation d'un facteur six par rapport au GSM, a vu malgré tout le jour.

La faible consommation est une contrainte forte pour les systèmes mobiles. Il s'agit en revanche d'une contrainte de second ordre pour les systèmes fixes. Les systèmes de numérisation large-bande existeront donc sans doute d'abord dans les stations fixes. Des recherches supplémentaires seront nécessaires pour minimiser leur consommation et ainsi pour pouvoir les intégrer dans des systèmes portables. La versatilité pourrait d'ailleurs jouer un rôle positif dans la gestion de la consommation du système. On peut imaginer, par exemple, que lorsque les performances requises le permettent, le logiciel puisse diminuer la quantité d'échantillons par seconde globale du système ainsi que le nombre d'opérations.

### **Versatilité**

Dans le futur, le logiciel devrait pouvoir modifier les caractéristiques des systèmes de numérisation. Par exemple, si l'on considère le choix d'un canal de largeur  $b$  dans une bande  $B$ , il serait bon de disposer d'un système qui, tout d'abord, numérise avec une certaine résolution la bande  $B$ , évalue l'emplacement du canal optimal, puis, augmente sa résolution dans  $b$  autour du canal. C'est ce que l'on pourrait appeler la focalisation spectrale commandée par logiciel. Cette idée est illustrée par la figure 2.5. On peut y voir un exemple dans lequel un système cherche un canal dans toute la bande  $B$  ( $\alpha$ ), s'adapte à un premier ( $\beta$ ) puis (par exemple après un dialogue avec un interlocuteur se place vers ( $\gamma$ )).

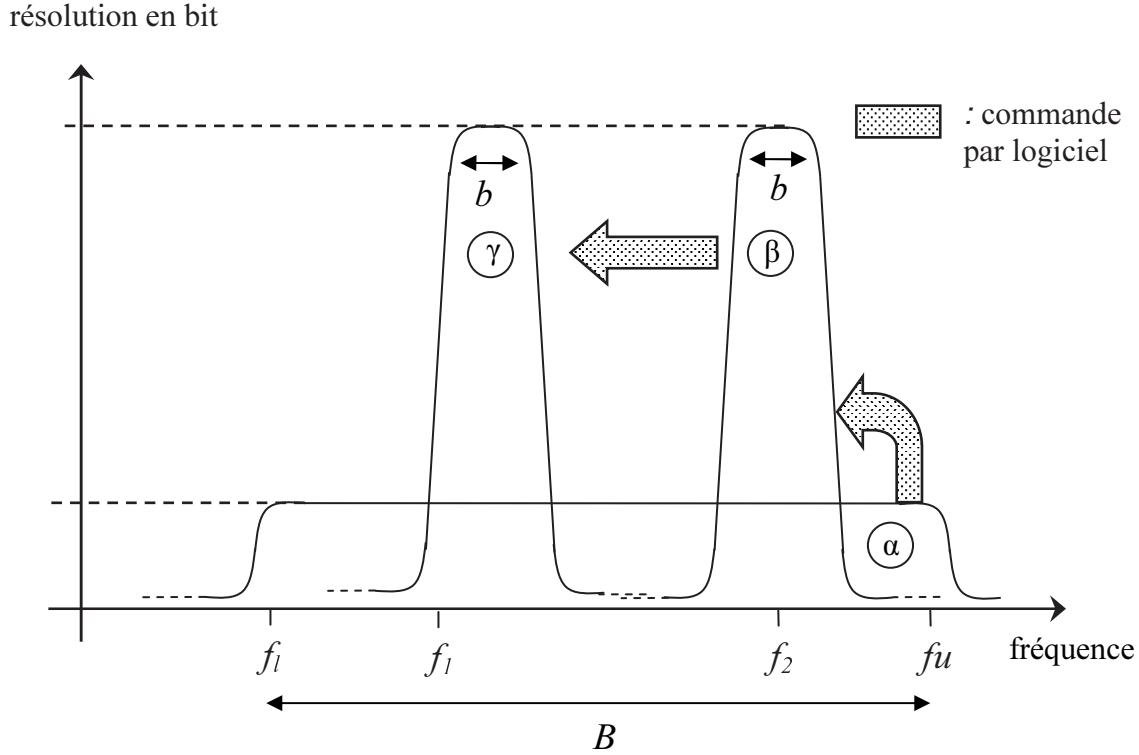


Fig. 2.5 – Focalisation spectrale

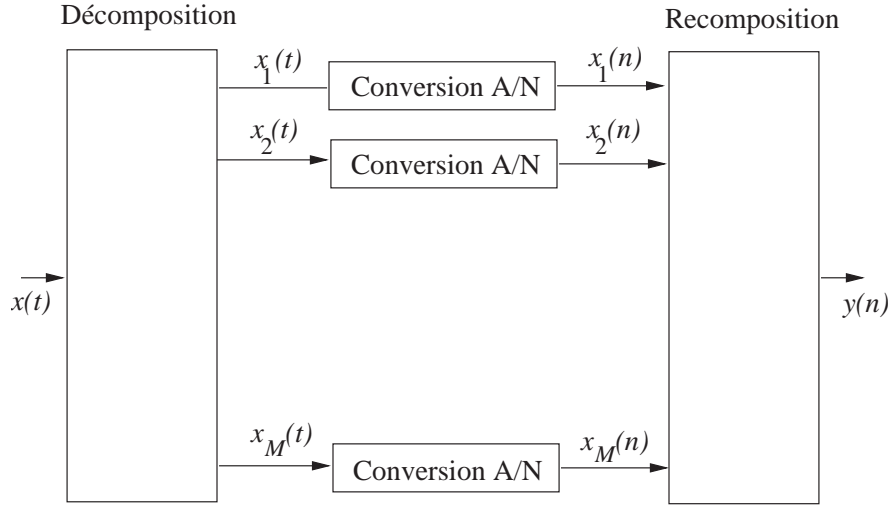
## Conclusion

Ces performances ne sont pas atteignables simultanément à leur niveau d'exigence le plus élevé. Aujourd'hui, il n'existe pas de convertisseur de fréquence d'échantillonnage 3 Géch/s avec une résolution de 12 bit, le plus rapide ayant une cadence d'échantillonnage de 1.5 Géch/s pour une résolution de 8 bit (voir l'annexe A). On pourrait attendre que les progrès technologiques y parviennent mais on ne peut pas prévoir à quelle échéance. Une alternative est d'étudier des architectures qui, à partir d'une fréquence d'échantillonnage donnée, permette d'étendre les performances, c'est-à-dire d'augmenter les facteurs de mérite  $P$  et  $F$ . C'est pourquoi nous nous intéressons aux structures parallèles. De plus, la versatilité est indispensable pour ces systèmes de numérisation. Nous verrons en quoi la solution BFH peut répondre à ce besoin.

## 2.2 Solutions potentielles

Afin d'augmenter la bande de conversion pour une fréquence d'échantillonnage donnée, on envisage dans la littérature des structures de type parallèle selon le principe

illustré sur la figure 2.6. Ces systèmes sont souvent appelés systèmes multi débit.



**Fig. 2.6** – *Structure parallèle pour CAN*

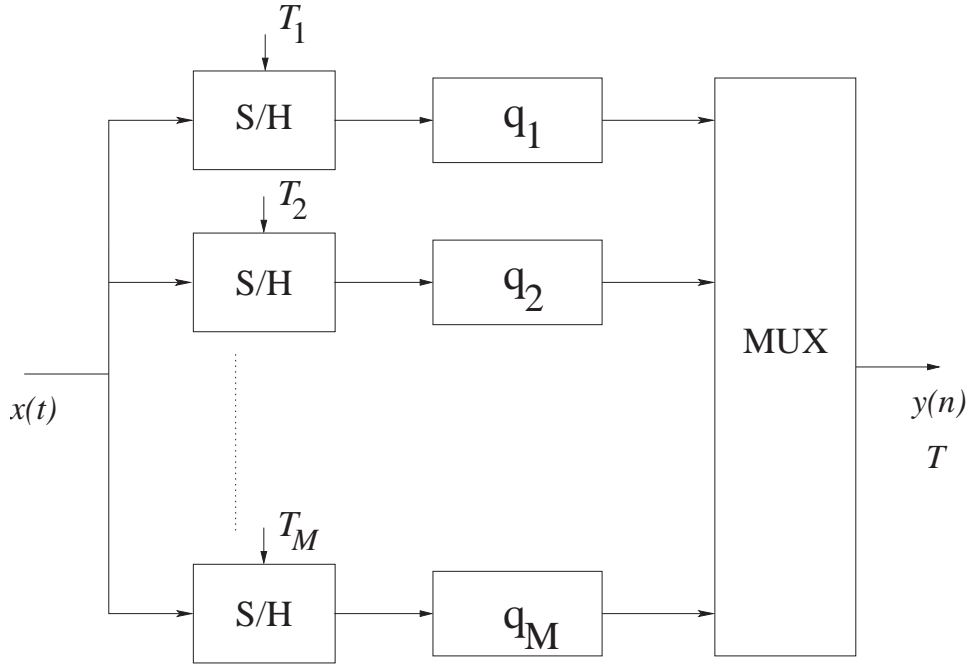
On cherche à numériser un signal  $x(t)$  à une période  $T$ . Le signal analogique  $x(t)$  est décomposé en  $M$  signaux  $x_m(t)$ ,  $m \in \{1, \dots, M\}$ . Sur chaque voie, le signal est sous-échantillonné à  $\frac{1}{MT}$ . Enfin, les sous-signaux échantillonnés  $x_m(n)$ ,  $m \in \{1, \dots, M\}$  sont recomposés selon une règle spécifique pour reconstituer un signal  $y(n)$  correspondant idéalement au signal  $x(t)$  échantillonné à  $\frac{1}{T}$ . Avec un sous-échantillonnage avant la conversion et un sur-échantillonnage après celle-ci, la fréquence d'échantillonnage du convertisseur équivalent peut être  $M$  fois supérieure à celle du convertisseur situé sur chacune des voies.

### 2.2.1 Décomposition temporelle

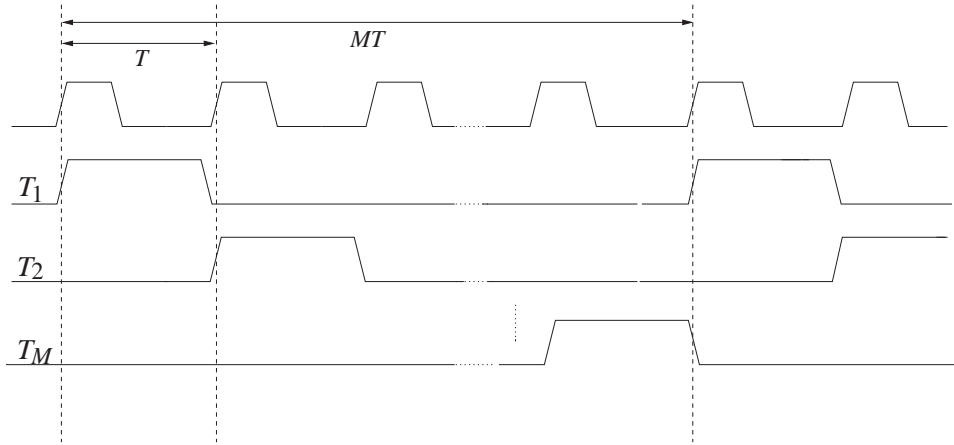
La première technique de parallélisation qui a été utilisée pour augmenter la vitesse de la conversion analogique/numérique est *l'entrelacement temporel* ("time interleaving") [6], [71]. La figure 2.7 présente le schéma fonctionnel d'un tel convertisseur. Dans cette technique,  $M$  CAN échantillonnent un signal à bande  $\pi/T$  à des périodes d'échantillonnage de  $MT$ . Les instants d'échantillonnage des CAN sont décalés les uns par rapport aux autres d'une durée  $T$ . Les signaux de commande des échantillonneurs sont représentés dans la Figure 2.8. Après l'échantillonnage, un multiplexeur reconstruit le signal de sortie à partir des échantillons sur chaque branche.

La période d'échantillonnage du convertisseur équivalent est donc  $T$ . En figure 2.9





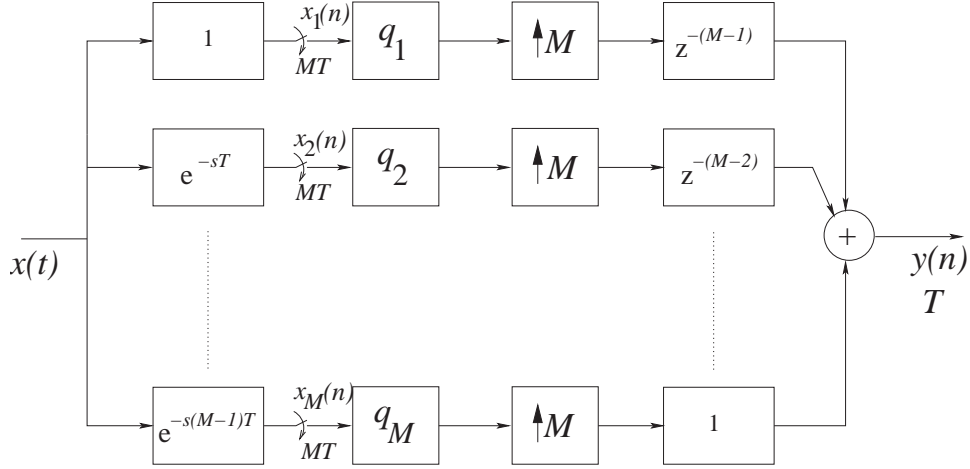
**Fig. 2.7** – *Convertisseur à entrelacement temporel - schéma fonctionnel*



**Fig. 2.8** – *Signaux de commande des échantillonneurs dans un convertisseur à entrelacement temporel*

on présente le schéma de principe équivalent. La résolution du convertisseur équivalent est théoriquement égale à la résolution du convertisseur individuel sur chaque branche.

Dans la pratique, les quantificateurs ne sont pas identiques. Les caractéristiques de quantification ont des gains différents (erreurs de gain dans les CAN). Les amplificateurs des échantillonneurs et les caractéristiques des quantificateurs présentent



**Fig. 2.9** – *Convertisseur à entrelacement temporel - schéma de principe*

également des erreurs de décalage. Il existe aussi des erreurs de phase des échantillonneurs. Ces trois sources d'erreurs limitent en pratique la résolution du convertisseur à entrelacement temporel. Des méthodes de correction de ces erreurs ont été proposées dans [17], [24], [25], [71], [90], [91].

La société Agilent produit un convertisseur analogique/numérique de ce type pour des oscilloscopes ayant une fréquence d'échantillonnage de 20 GÉch/s pour une résolution de 8 bit [2]. Il contient 80 convertisseurs analogique/numérique à 250 MÉch/s réalisés en architecture pipeline et utilise des techniques de calibration pour compenser les erreurs énumérées ci-dessus. Pour de meilleures résolutions, Analog Devices produit un convertisseur de 12 bit et 400 MÉch/s (l'AD 12401) [4], [38]. Celui-ci utilise des techniques de calibration lui permettant de compenser les erreurs d'appariement de gain, de phase et de décalage. Il contient deux CAN à 12 bit, entrelacés.

### 2.2.2 Décomposition fréquentielle

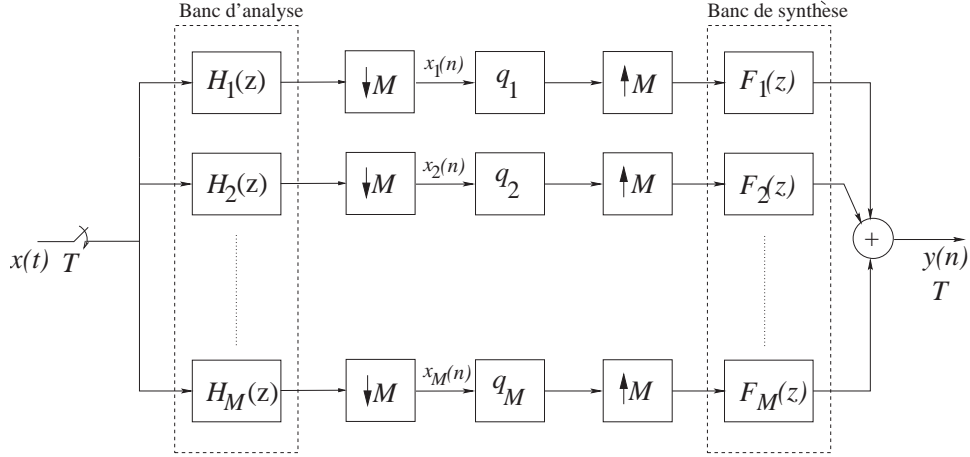
Une autre manière d'augmenter la fréquence d'échantillonnage est d'utiliser une décomposition spectrale du signal d'entrée.

Cette décomposition peut se faire avec un banc de filtres analogique (*banc d'analyse*). Les signaux qui en résultent sont ensuite échantillonnés à des cadences moins élevées que la fréquence Nyquist du signal d'entrée, sur-échantillonnés et recomposés utilisant un banc de filtres numérique (*banc de synthèse*) pour reconstituer le signal numérique désiré. Un tel système s'appelle *banc de filtres hybride*.

Une autre manière de réaliser une décomposition fréquentielle est d'utiliser des modulateurs sigma-delta en parallèle, chaque modulateur convertissant une sous-bande de la bande totale du signal. Cette architecture n'est pas abordée dans ce rapport.

### Bancs de filtres hybrides à temps discret

La Figure 2.10 représente un BFH à temps discret. On suppose que  $x(t)$  est de



**Fig. 2.10** – *Banc de filtres hybride à temps discret*

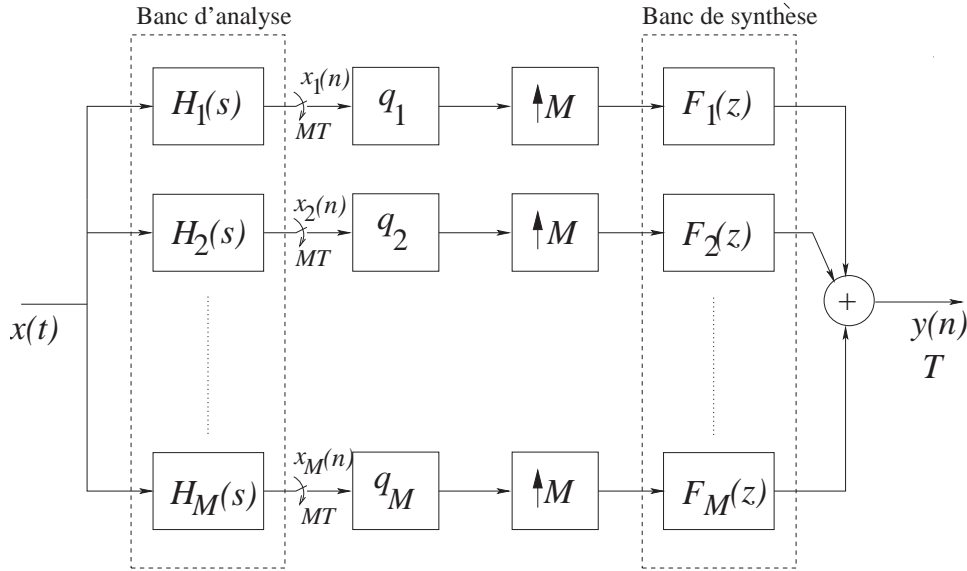
bande limitée à  $\pi/T$  par un filtre externe. Cette fois, le banc d'analyse est constitué de filtres analogiques à temps discret de fonctions de transfert  $H_1(z)$ ,  $H_2(z)$ , ...,  $H_M(z)$  (par exemple des filtres à capacités commutées). Le signal  $x(t)$  est tout d'abord échantillonné et ensuite filtré par les filtres  $H_1(z)$ ,  $H_2(z)$ , ...,  $H_M(z)$ . Ensuite, les signaux  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$ , ...,  $x_M(n)$  sont sous-échantillonnés et quantifiés à une cadence  $M$  fois inférieure à la cadence nécessaire dans le cas d'une conversion analogique/numérique directe du signal  $x(t)$ . Après la quantification, les signaux sont sur-échantillonnés et filtrés par le banc de synthèse ( $F_1(z)$ ,  $F_2(z)$ , ...,  $F_M(z)$ ). Le signal  $y(n)$  obtenu par la somme des signaux de sortie des filtres de synthèse représente le signal d'entrée  $x(t)$ , numérisé. L'avantage du banc de filtres hybride à temps discret est que les filtres à capacités commutées peuvent être implémentés avec une meilleure précision que les filtres analogiques à temps continu. L'inconvénient de ce type de structure est que l'échantillonnage du signal  $x(t)$  qui a lieu avant le filtrage d'analyse doit se faire avec une cadence correspondant à la bande totale de ce signal. Un autre inconvénient est lié à la bande réduite des filtres à temps discret puisqu'on est limité par la fréquence

maximale des filtres à temps discret qui est de l'ordre de la fréquence maximale des CAN.

Les bancs de filtres hybrides à temps discret pour la conversion analogique/numérique ont été introduits pour la première fois dans [63]. L'effet du bruit de quantification total à la sortie des convertisseurs utilisant des BFH à temps discret a été étudié dans [64]. L'analyse de l'influence des imperfections analogiques sur les performances des BFH à temps discret a été faite dans [69] ou [70].

### Bancs de filtres hybrides à temps continu

La figure 2.11 représente un BFH à temps continu. Cette structure a été proposée



**Fig. 2.11** — *Banc de filtres hybride à temps continu*

dans [84]. Dans ce cas, le spectre du signal analogique d'entrée  $x(t)$  est directement décomposé par les filtres de synthèse  $H_1(s)$ ,  $H_2(s)$ , ...,  $H_M(s)$  qui sont maintenant à temps continu. Supposons que  $x(t)$  a la bande limitée à  $]-\pi/T, \pi/T]$  par un filtre externe. Les  $M$  signaux qui en résultent après le filtrage sont échantillonnés et quantifiés à la cadence  $1/MT$ , donc à une cadence  $M$  fois plus basse que si on avait échantillonné et quantifié directement le signal  $x(t)$ . Ensuite, les signaux numériques  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$ , ...,  $x_M(n)$  sont quantifiés, sur-échantillonnés et filtrés par les filtres numériques du banc de synthèse  $F_1(z)$ ,  $F_2(z)$ , ...,  $F_M(z)$ . Enfin, le signal de sortie  $y(n)$  est constitué de la somme des signaux de sortie des filtres numériques. On cherche à trouver les

filtres  $H_m(s)$  et  $F_m(z)$ , pour  $m \in \{1, \dots, M\}$  pour que le signal  $y(n)$  soit le plus proche possible du signal d'entrée, numérisé  $x(nT)$  à un retard près.

L'avantage des bancs de filtres hybrides à temps continu provient de la nature des filtres analogiques qui permettent des fréquences de travail plus élevées que les filtres à capacités commutées. Donc les fréquences d'échantillonnage des convertisseurs analogique/numérique réalisés dans ce type de structures peuvent être plus grandes que dans le cas temps discret. L'inconvénient principal de ces structures est lié à l'imprécision de réalisation des filtres analogiques, plus grande que l'imprécision de réalisation des filtres à capacités commutées.

Certains travaux sur les bancs de filtres hybrides à temps continu ont été publiés. Une analyse fréquentielle des BFH peut être trouvée dans [39], [42], et [90]. Plusieurs méthodes de synthèse pour des bancs de filtres à deux voies peuvent être trouvées dans [39], [41], [43], [44], [45], [47]. Des méthodes de synthèse des BFH, qui ne contiennent pas forcément seulement deux voies se trouvent dans [77], [90], ou [93]. Dans [58] et [59], partant d'un prototype de banc de filtres discret, les réponses idéales des filtres d'analyse sont calculées. Le bruit de quantification est étudié dans [39]. Une analyse des erreurs d'appariement des CAN qui se trouvent sur chaque voie du BFH est faite dans [39], [46] et [90]. Certaines techniques de conception de BFH ont été brevetées par Velazquez [88], [89], [87].

Dans [35], [36], [37], [65], [66] et [68] se trouvent nos contributions pour l'élaboration de méthodes de synthèse de BFH adaptées aux contraintes de réalisation. Ces articles contiennent des exemples de synthèse pour des bancs de filtres à huit voies.

### 2.2.3 Intérêt de la solution BFH

Dans cette section, les avantages de la solution à BFH par rapport à la solution à entrelacement temporel pour la réalisation des convertisseurs analogique/numérique sont montrés. Petraglia et al. [63], Velazquez [90] ou Löwenborg et al. [46] montrent que les filtres d'analyse atténuent les erreurs introduites par les imperfections des convertisseurs analogique/numérique sur chaque branche. On a vu dans le paragraphe 2.2.1 qu'il y a trois types d'erreurs dans les convertisseurs analogique/numérique : les erreurs de gain, les erreurs de décalage et les erreurs de phase. Les erreurs ci-dessus peuvent être modélisées par [62], [90] :

$$x_{qm}(n) = a_m(n) * x_m(n) + b_m \quad (2.7)$$

où  $x_{qm}(n)$  est le signal échantillonné et quantifié sur la branche  $m$ ,  $b_m$  représente le décalage du convertisseur de la branche  $m$ ,  $x_m(n)$  représente le signal échantillonné idéalement, et  $a_m(n)$  est la réponse impulsionnelle de la fonction de transfert du CAN de la branche  $m$ .

Pour évaluer l'impact de ces erreurs, on applique à l'entrée un signal sinusoïdal :

$$x(t) = S_0 \cos(2\pi F_0 t). \quad (2.8)$$

Le spectre de la sortie du convertisseur analogique/numérique contiendra une raie spectrale sur la fréquence  $F_0$  (le signal utile), des raies sur d'autres fréquences (les signaux d'erreurs de repliement) et du bruit provenant de la quantification et des autres sources de bruit dans le convertisseur. On utilise la notion de "*Spurious Free Dynamic Range*" qui est définie comme [80], [90] :

$$SFDR = \frac{E\{|Amplitude\ signal\ sur\ F_0\ en\ sortie|^2\}}{\max(E\{|Amplitude\ signaux\ sur\ d'autres\ fréquences\ en\ sortie|^2\})} \quad (2.9)$$

où  $E\{x\}$  est l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $x$ . C'est le rapport entre la moyenne quadratique de l'amplitude du signal de fréquence  $F_0$ , présent à la sortie et le maximum des moyennes quadratiques des amplitudes des autres signaux sur d'autres fréquences, présents dans le signal de sortie. Les valeurs des  $SFDR$  ont été calculées dans [90] pour le cas d'un BFH à temps discret et pour le cas des systèmes à entrelacement temporel.

Ci-après nous donnons les expressions du SFDR pour le cas d'un système à entrelacement temporel et pour le cas d'un BFH à temps continu, dans un cas typique. Ces expressions sont montrées en Annexe C.

## Erreurs de gain

On considère tout d'abord qu'il y a uniquement des erreurs de gain (les erreurs de phase des échantillonneurs et les erreurs de décalage sont nulles). Dans ce cas, le  $SFDR$  pour un système à entrelacement temporel est :

$$SFDR_{ET} = \frac{M}{E\{\tilde{a}^2\}}. \quad (2.10)$$

où  $E\{\tilde{a}^2\}$  est la variance des erreurs de gain sur toutes les voies.

Pour un BFH, si le signal parasite « tombe » dans la bande coupée on a une valeur typique du  $SFDR$  :

$$SFDR_{BFHtypique} = \frac{1}{2E\{\tilde{a}^2\}(h)^2} \quad (2.11)$$

où  $h$  est le rapport entre le module des filtres dans la bande coupée (considéré constant dans toute la bande coupée) et le module des filtres dans la bande passante des filtres (considéré constant dans toute la bande passante des filtres).

### Erreurs de phase des échantillonneurs

On considère maintenant qu'il n'y a que les erreurs de phase, les erreurs de gain et les erreurs de décalage étant nulles. Une valeur typique du  $SFDR$  est obtenue quand les signaux parasites ont de fréquences de type  $\frac{(2k+1)\pi}{2M}$ ,  $|k| < \frac{2M-1}{2}$  :

$$SFDR_{ETtypique} = \frac{4M}{\pi^2 E\{d^2\}}. \quad (2.12)$$

où  $E\{d^2\}$  est la variance des erreurs de phase des échantillonneurs sur toutes les voies. La valeur typique pour un BFH à temps continu s'obtient aussi pour des fréquences des signaux de repliement de type  $\frac{(2k+1)\pi}{2M}$ ,  $|k| < \frac{2M-1}{2}$  :

$$SFDR_{BFHtypique} = \frac{2}{\pi^2 E\{d^2\} h^2} \quad (2.13)$$

où  $h$  est défini dans le paragraphe précédent.

### Erreurs de décalage

Enfin, on suppose que les erreurs de gain et de phase sont nulles et il y a uniquement des erreurs de décalage. Pour un système avec entrelacement temporel, le  $SFDR$  est :

$$SFDR_{ET} = \frac{M}{4E\{b^2\}}. \quad (2.14)$$

où  $E\{b^2\}$  est la variance des erreurs de décalage. Pour un BFH à temps continu ayant des convertisseurs analogique/numérique présentant un décalage, le SFDR est :

$$SFDR_{BFH} = \frac{1}{4E\{b^2\}}. \quad (2.15)$$

Pour conclure, on remarque que les erreurs de gain, de phase et de décalage des CAN de branche dégradent les performances des convertisseurs analogique/numérique construits en structure parallèle, que ce soit avec décomposition temporelle où fréquentielle.

En ce qui concerne les erreurs de gain et de phase, ce n'est pas l'écart par rapport à la valeur nominale qui empêche l'annulation des termes de repliement. Si tous ces

écarts sur toutes les voies sont égaux, et si la structure permet à l'origine la reconstruction parfaite, nous verrons dans le chapitre 3 que la structure parallèle permet, même après l'implémentation, l'annulation des termes de repliement. Par contre, si les erreurs de gain et de phase ne sont pas égales entre les voies, on va constater que les termes de repliement ne s'annulent plus (équations (2.52)-(2.54)). Cependant, cet effet est estompé par l'atténuation des filtres dans le cas des BFH. Pour analyser cela d'une manière quantitative, une mesure est typiquement étudiée (*SFDR*). Cette mesure quantifie le niveau des erreurs de repliement. Plus le *SFDR* est grand, meilleures sont les performances du convertisseur. Pour le cas des structures à entrelacement temporel, le *SFDR* est proportionnel au nombre de voies parce qu'un effet de compensation statistique des erreurs se produit (les erreurs de gain sont supposées des variables aléatoires de moyenne nulle) (équations (2.10),(2.12)). Pour le cas des structures à BFH cet effet de compensation n'apparaît pas, mais le *SFDR* typique de ces structures est multiplié par le rapport entre le gain dans la bande passante et le gain dans la bande coupée des filtres (équations (2.11), (2.13)). Si ce rapport est suffisamment grand, le *SFDR* des bancs de filtres peut être meilleur que le *SFDR* des structures à entrelacement temporel.

Les erreurs de décalage dégradent aussi le *SFDR* des structures de type parallèle. Pour les structures à entrelacement temporel, le même effet de compensation statistique se produit que dans le cas des erreurs des gain et de phase (équation (2.14)). Au contraire, cet effet ne se produit pas dans le cas des BFH (équation (2.15)), donc, les erreurs de décalage sont plus grandes dans les structures à décomposition fréquentielle que dans les structures à décomposition temporelle.

## 2.3 Études actuelles sur les BFH

Dans cette section, les expressions de la sortie des bancs de filtres hybrides à temps discret et à temps continu sont d'abord rappelées. Ensuite, une analyse du spectre du signal de sortie des BFH est faite. Les méthodes actuelles de synthèse des BFH sont résumées.



### 2.3.1 Théorie des BFH

#### Bancs de filtres hybrides à temps discret

Soit  $X(e^{j\omega})$  la transformée de Fourier du signal d'entrée échantillonné  $x(nT)$  :

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{TF}\{x(nT)\} \quad (2.16)$$

La transformée de Fourier du signal  $x_m(n)$  pour  $m \in \{1, \dots, M\}$  dans la figure 2.10 est :

$$X_m(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{p=0}^{M-1} X(e^{j(\omega-2\pi p)/M}) H_m(e^{j(\omega-2\pi p)/M}). \quad (2.17)$$

Pour l'instant, on ne prend pas en compte la quantification. Après le sur-échantillonnage et le filtrage numérique, la sortie du filtre  $F_m(e^{j\omega})$  est :

$$Y_m(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{p=0}^{M-1} X(e^{j(\omega M-2\pi p)/M}) H_m(e^{j(\omega M-2\pi p)/M}) F_m(e^{j\omega}). \quad (2.18)$$

La sortie sera donc :

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \sum_{m=1}^M Y_m(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{p=0}^{M-1} X(e^{j(\omega-2\pi p)/M}) H_m(e^{j(\omega-2\pi p)/M}) F_m(e^{j\omega}). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Avec la notation :

$$T_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M H_m(e^{j(\omega-2\pi p)/M}) F_m(e^{j\omega}) \quad (2.20)$$

l'équation (2.19) devient :

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{p=0}^{M-1} T_p(e^{j\omega}) X(e^{j(\omega-2\pi p)/M}). \quad (2.21)$$

Le spectre de la sortie est donc la somme du spectre du signal utile et de  $M - 1$  décalés de  $2\pi p/M$  avec  $p \in \{1, \dots, M - 1\}$ . Dans la somme (2.21) les termes pour  $p \in \{1, \dots, M - 1\}$  sont des termes de repliement de spectre.  $T_p(e^{j\omega})$  pour  $p \in \{1, \dots, M - 1\}$  s'appellent *les fonctions de repliement*. Pour que le signal de sortie soit égal au signal d'entrée, ces termes doivent s'annuler. Le terme pour  $p = 0$  contient le spectre du signal utile multiplié par  $T_0(e^{j\omega})$ .  $T_0(e^{j\omega})$  s'appelle *la fonction de distorsion*. On

veut que le signal de sortie soit égal au signal d'entrée, éventuellement retardé de  $d$  échantillons et multiplié par une constante  $c$ . Alors, les conditions de reconstruction parfaite s'écrivent :

$$T_p(e^{j\omega}) = \begin{cases} ce^{-j\omega d}, & p = 0 \\ 0 & , p \in \{1, \dots, M-1\}. \end{cases} \quad (2.22)$$

### Bancs de filtres hybrides à temps continu

Soit  $X(j\Omega)$  la transformée de Fourier du signal d'entrée  $x(t)$  :

$$X(j\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}. \quad (2.23)$$

La figure 2.11 présente le schéma du BFH à temps continu. Dans ce cas, le banc d'analyse est composé de filtres analogiques à temps continu et le signal d'entrée  $x(t)$  est aussi à temps continu. Alors, la transformée de Fourier des signaux  $x_m(t)$  pour  $m \in \{1, \dots, M\}$  est :

$$X_m(j\Omega) = \frac{1}{MT} \sum_{p=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right) H_m\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right). \quad (2.24)$$

Après le sur-échantillonnage et le filtrage numérique, la sortie du filtre  $F_m(e^{j\omega})$  est :

$$Y_m(e^{j\omega}) = \frac{1}{MT} \sum_{p=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right) H_m\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right) F_m(e^{j\omega}) \quad (2.25)$$

où :

$$\omega = \Omega T.$$

La sortie sera donc :

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \sum_{m=1}^M Y_m(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{MT} \sum_{m=1}^M \sum_{p=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right) H_m\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right) F_m(e^{j\omega}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Avec la notation :

$$T_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M H_m\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right) F_m(e^{j\omega}) \quad (2.27)$$

l'équation (2.26) devient :

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{p=-\infty}^{\infty} T_p(e^{j\omega}) X\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right). \quad (2.28)$$

Donc le spectre de la sortie est la somme du spectre de l'entrée, multiplié par  $T_0(e^{j\omega})$  et des décalés de  $2\pi p/MT$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  du spectre de l'entrée, multipliés par  $T_p(e^{j\omega})$ ,  $p \neq 0$  (termes de repliement spectral). Si les fonctions  $F_m(e^{j\omega})$  et  $H_m(j\Omega)$  sont telles que les fonctions  $T_p(e^{j\omega})$  s'annulent pour  $p \neq 0$ , le repliement est éliminé. Et si  $F_m(e^{j\omega})$  et  $H_m(j\Omega)$  sont telles que  $T_0(e^{j\omega})$  représente un retard, le banc de filtres n'introduit pas de distorsion. Alors on peut écrire les conditions de reconstruction parfaite pour le banc de filtres hybride à temps continu :

$$T_p(e^{j\omega}) = \begin{cases} ce^{-j\omega d}, & p = 0 \\ 0 & , p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases} \quad (2.29)$$

La théorie des bancs de filtres numériques (pour lesquels les filtres du banc d'analyse et les filtres du banc de synthèse sont numériques)[84] montre qu'il existe des BFH à temps discret à reconstruction parfaite. Ceci provient à l'origine du fait que les conditions de reconstruction parfaite (2.22) constituent un système de  $M$  équations à  $M$  inconnues (dans lequel on considère que les filtres d'analyse sont donnés et les filtres de synthèse  $\{F_m(e^{j\omega})\}$  sont les inconnues). La nature analogique des filtres d'analyse dans le cas des BFH fait l'analyse un peu plus difficile mais nous allons montrer que pour des signaux d'entrée à spectre borné on peut trouver, dans certaines conditions, des BFH à temps continu à reconstruction parfaite.

On suppose donc que le spectre du signal d'entrée est de bande limitée à  $\pi/T$  ( $X(j\Omega) = 0$ , pour  $|\Omega| \geq \pi/T$ ). Pour que la fonction  $X(j\Omega)$  soit non-nulle, son argument doit être compris entre  $-\pi/T$  et  $\pi/T$ , c'est-à-dire, pour le décalé d'ordre  $p$ , l'argument doit vérifier :

$$-\frac{\pi}{T} < \Omega - \frac{2\pi p}{MT} < \frac{\pi}{T}. \quad (2.30)$$

On considère pour la sortie, la bande de pulsation normalisée  $B = ]-\pi, \pi]$ . Il suffit d'analyser la sortie sur cet intervalle puisque, le signal de sortie étant numérique, son spectre est une fonction périodique par rapport à la pulsation, de période  $2\pi$ . On veut trouver les décalés du spectre du signal d'entrée qui ont des contributions dans la bande  $B$ . On prend donc en compte l'intervalle  $-\pi < \omega \leq \pi$  soit :

$$-\frac{\pi}{T} < \Omega \leq \frac{\pi}{T}. \quad (2.31)$$

À partir des inéquations (2.30) et (2.31), on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{T} < -\frac{\pi}{T} - \frac{2\pi p}{MT} < \frac{\pi}{T} \\ \text{ou} \\ -\frac{\pi}{T} < \frac{\pi}{T} - \frac{2\pi p}{MT} < \frac{\pi}{T}. \end{array} \right. \quad (2.32)$$

À partir de (2.32), on trouve :

$$-M < p < M \quad (2.33)$$

où équivalent  $p \in \{-(M-1), -(M-2), \dots, M-2, M-1\}$ . Alors, l'équation (2.28) devient :

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{p=-(M-1)}^{M-1} T_p(e^{j\omega}) X\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right) \quad (2.34)$$

et les conditions de reconstruction parfaite peuvent s'écrire :

$$T_p(e^{j\omega}) = \begin{cases} ce^{-j\omega d}, & p = 0 \\ 0 & , p \in \{-(M-1), \dots, -1, 1, \dots, M-2, M-1\}. \end{cases} \quad (2.35)$$

Il y a donc  $2M-1$  termes de repliement de spectre pour l'intervalle  $-\pi < \omega < \pi$ .  $T_0(e^{j\omega})$  s'appelle *la fonction de distorsion* et  $T_p(e^{j\omega})$  pour  $p \neq 0$  s'appellent *les fonctions de repliement*.

De plus, d'après [26] et [85], pour chaque fréquence dans la bande  $-\pi < \omega \leq \pi$ , seulement  $M$  termes ont des contributions non-nulles dans la somme (2.34). Pour montrer cela, on considère une fréquence  $\Omega_0 \in ]-\pi/T, \pi/T]$ . De nouveau, pour que la fonction  $X\left(j\Omega_0 - j\frac{2\pi p}{MT}\right)$  soit non-nulle, son argument doit satisfaire :

$$-\frac{\pi}{T} < \Omega_0 - \frac{2\pi p}{MT} < \frac{\pi}{T} \quad (2.36)$$

parce que  $X(j\Omega)$  est de bande limitée à  $\pi/T$ . Par conséquent, on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{max} = \left\lceil \frac{M}{2} + \Omega_0 \frac{MT}{2\pi} \right\rceil - 1 \\ p_{min} = \left\lfloor -\frac{M}{2} + \Omega_0 \frac{MT}{2\pi} \right\rfloor \end{array} \right. \quad (2.37)$$

où  $\lceil x \rceil$  représente arrondi supérieur de  $x$ . Donc le nombre de termes de repliement non nuls qui interviennent en (2.34) pour une fréquence  $\Omega_0 \in ]-\pi/T, \pi/T[$  est de :

$$p_{max} - p_{min} + 1 = M. \quad (2.38)$$

Si on considère les filtres d'analyse donnés et on cherche les filtres de synthèse pour constituer un BFH à reconstruction parfaite, pour chaque intervalle

$$I_k = ]-\pi/T + 2\pi(k-1)/MT, -\pi/T + 2\pi k/MT[, \quad k \in \{1, 2, \dots, M\} \quad (2.39)$$

(2.35) représente un système de  $M$  équations avec  $M$  inconnues (les filtres de synthèse  $F_m(e^{j\omega})$ ,  $m \in \{1, 2, \dots, M\}$ ) [26]. Pour montrer cela on écrit les conditions pour que, pour un certain  $p$ , le décalé  $X\left(j\Omega - j\frac{2\pi p}{MT}\right)$ , soit situé en dehors de l'intervalle  $I_k$  :

$$\begin{cases} \frac{\pi}{T} + \frac{2\pi p}{MT} \leq -\frac{\pi}{T} + 2\pi \frac{k-1}{MT} \\ \text{ou} \\ -\frac{\pi}{T} + \frac{2\pi p}{MT} \geq -\frac{\pi}{T} + 2\pi \frac{k}{MT}. \end{cases} \quad (2.40)$$

D'où il résulte :

$$\begin{cases} p \leq -M + k - 1 \\ \text{ou} \\ p \geq k \end{cases} \quad (2.41)$$

avec  $k \in \{1, \dots, M\}$ . Donc, les décalés  $X\left(j\Omega - j\frac{2\pi p}{MT}\right)$  auront des contributions énergétiques dans l'intervalle  $I_k$  pour  $p \in \mathcal{R}$ , où

$$\mathcal{R} = \{-M + k, \dots, k - 1\}. \quad (2.42)$$

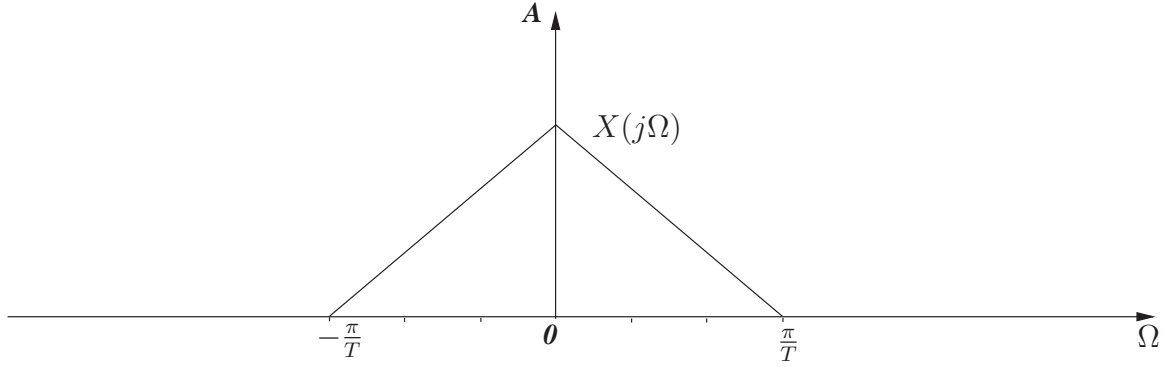
Il y a donc  $M$  termes en (2.34) qui ont des contributions non nulles dans l'intervalle  $I_k$  et, par conséquent, (2.35) représente un système de  $M$  équations avec  $M$  inconnues. Si le déterminant du système est différent de zéro pour tout  $\Omega$ , on peut trouver les filtres de synthèse (pas nécessairement réalisables) pour que le banc de filtres soit à reconstruction parfaite.

### Exemple 1.

Soit un BFH à 3 voies et on choisit les filtres de synthèse comme suit :

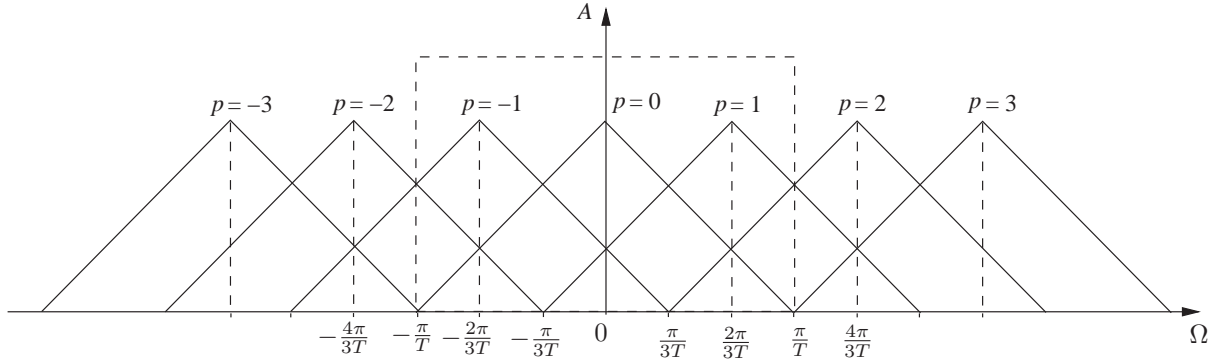
$$\begin{cases} H_1(s) = 1 \\ H_2(s) = s \\ H_3(s) = s^2. \end{cases} \quad (2.43)$$

Le spectre du signal d'entrée est représenté en Figure 2.12. Les spectres des décalés



**Fig. 2.12** – Spectre du signal d'entrée pour l'exemple 1

$X\left(j\Omega - j\frac{2\pi p}{MT}\right)$  sont représentés en Figure 2.13 pour  $p \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ . On peut voir clairement que seulement les décalés pour  $p \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  ont de l'énergie dans l'intervalle  $-\pi/T < \Omega < \pi/T$ . Donc, comme nous l'avons montré ci-dessus, la somme (2.28) contient seulement  $2M - 1 = 5$  termes différents de zéro pour  $-\pi/T < \Omega < \pi/T$ .



**Fig. 2.13** – Spectres des décalés du signal d'entrée  $X(j\Omega - j2\pi p/MT)$  pour l'exemple 1

Les termes de repliement ayant des contributions non-nulles dans les trois intervalles de type (2.39) sont montrés dans le Tableau 2.1.

En écrivant les conditions de reconstruction parfaite pour chacun des intervalles indiqués dans le Tableau 2.1 on obtient trois systèmes de trois équations avec les inconnues, les fonctions de transfert des filtres de synthèse,  $F_1(e^{j\omega})$ ,  $F_2(e^{j\omega})$ ,  $F_3(e^{j\omega})$ . En calculant ensuite la transformée de Fourier inverse pour chacune des fonctions de transfert on obtient les réponses impulsionnelles des trois filtres (voir Annexe B) :

**Tab. 2.1** – *Les termes de repliement ayant des contributions non-nulles dans l'équation (2.34) appliquée à l'exemple 1*

	Intervalle	Intervalle	Intervalle
	$-\frac{\pi}{T} < \Omega < -\frac{\pi}{3T}$	$-\frac{\pi}{3T} < \Omega < \frac{\pi}{3T}$	$\frac{\pi}{3T} < \Omega < \frac{\pi}{T}$
$p$	-2,-1,0	-1,0,1	0,1,2

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(n) = Mc \frac{\sin \frac{a'(n-d)}{2} (24 + 3(n-d)^2 a'^2)}{8\pi(n-d)^3 a'^2} \\ f_2(n) = MTc \frac{3 \sin \frac{a'(n-d)}{2}}{\pi(n-d)^2 a'^2} \\ f_3(n) = MT^2c \frac{3 \sin \frac{a'(n-d)}{2}}{2\pi(n-d) a'^2} \end{array} \right. \quad (2.44)$$

où  $a' = 2\pi/3$ .

### Erreurs d'appariement des CAN sur chaque voie des BFH à temps continu

On a vu dans le paragraphe 2.2.3 que les erreurs d'appariement entre les CAN sur les voies du BFH sont modélisées par (2.7). La transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle des erreurs de gain,  $a_m(n)$  peut s'écrire :

$$A_m(e^{j\omega}) = \mathcal{TF}\{a_m(n)\} = (1 + \tilde{a}_m)e^{-j\omega d_m} \quad (2.45)$$

où  $\tilde{a}_m$  est l'erreur de gain sur la branche  $m$  et  $d_m$  représente l'erreur de phase des échantillonneurs.  $\omega = \Omega MT$  est la pulsation normalisée. Pour la transformée de Fourier du terme de décalage on part de la transformée de Fourier d'un signal en temps continu  $b_m(t) = b_m$  où  $b_m$  est une constante réelle. Alors :

$$\mathcal{F}\{b_m(t)\} = B_m(j\Omega) = 2\pi b_m \delta(\Omega) \quad (2.46)$$

où  $\delta(\Omega)$  est la distribution Dirac définie par :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\Omega) \delta(\Omega) d\Omega = x(0). \quad (2.47)$$

Le décalage en temps discret  $b_m(n)$  est obtenu par l'échantillonnage du signal  $b_m(t)$  avec la période d'échantillonnage  $MT$ , des convertisseurs de branche. La transformée de Fourier du terme de décalage est alors :

$$\mathcal{TF}\{b_m(n)\} = \frac{1}{MT} \sum_{p=-\infty}^{\infty} B_m(j(\Omega - \frac{2\pi p}{MT})) = \frac{2\pi}{MT} b_m \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}). \quad (2.48)$$

On peut donc écrire :

$$B_m(e^{j\omega}) = \mathcal{TF}\{b_m(n)\} = 2\pi b_m \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi p) \quad (2.49)$$

avec  $\omega = \Omega MT$ .

On a vu dans le paragraphe 2.3.1 que la sortie du BFH continu est :

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{p=-(M-1)}^{M-1} X\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right) T_p(e^{j\omega}) \quad (2.50)$$

où  $T_p(e^{j\omega})$  est :

$$T_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M F_m(e^{j\omega}) H_m\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right). \quad (2.51)$$

D'une manière similaire que dans le paragraphe 2.3.1 on peut déduire le spectre de la sortie du filtre de synthèse  $F_m(e^{j\omega})$  en tenant compte des imperfections des convertisseurs :

$$\begin{aligned} Y_m(e^{j\omega}) &= \frac{1}{MT} \sum_{p=-(M-1)}^{M-1} X\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right) H_m\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right) A_m(e^{j\omega M}) F_m(e^{j\omega}) + \\ &\quad + F_m(e^{j\omega}) B_m(e^{j\omega M}) \end{aligned} \quad (2.52)$$

avec  $\omega = \Omega T$ . La sortie sera :

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{p=-(M-1)}^{M-1} X\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right) \hat{T}_p(e^{j\omega}) + \sum_{m=1}^M F_m(e^{j\omega}) B_m(e^{j\omega M}) \quad (2.53)$$

où  $\hat{T}_p(e^{j\omega})$  est donné par :

$$\hat{T}_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M A_m(e^{j\omega M}) F_m(e^{j\omega}) H_m\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right). \quad (2.54)$$

Dans les équations (2.53) et (2.54) on peut voir l'effet des imperfections sur la sortie du banc de filtres. Si le banc de filtres était à reconstruction parfaite, c'est-à-dire :



$$T_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M F_m(e^{j\omega}) H_m\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right) = 0 \quad (2.55)$$

pour  $p \in \{-(M-1), \dots, M-1\} \setminus \{0\}$ , maintenant la fonction  $\hat{T}_p(e^{j\omega})$  n'est plus nulle en général. En fait, les différences entre les imperfections (de gain et de phase) empêchent l'annulation des termes de repliement. Si

$$A_1(e^{j\omega}) = A_2(e^{j\omega}) = \dots = A_M(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})$$

la fonction  $A(e^{j\omega})$  sort en facteur commun dans la somme (2.54) et

$$\hat{T}_p(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega M}) T_p(e^{j\omega}) = 0$$

pour  $p \in \{-(M-1), \dots, M-1\} \setminus \{0\}$ . Si  $p = 0$ , la fonction de distorsion est seulement multipliée par  $A(e^{j\omega M})$ . Donc les termes de repliement s'annulent toujours si toutes les imperfections des CAN sont égales. Par contre, les erreurs de décalage existeront même si les valeurs des décalages des  $M$  convertisseurs analogique/numérique sont égales. En effet, le terme:

$$\sum_{m=1}^M F_m(e^{j\omega}) B_m(e^{j\omega M})$$

reste toujours différent de zéro dans la somme (2.53).

### 2.3.2 Méthodes de synthèse classiques

Cette section passe brièvement en revue les méthodes existantes de synthèse des BFH à temps continu.

Une première idée qui a été exploitée était de partir d'un banc de filtres numérique à reconstruction parfaite et de trouver un banc de filtres analogiques d'analyse qui approximent dans un certain sens les filtres numériques d'analyse [58], [92]. Ainsi, un BFH peut être obtenu. Velazquez [92] construit une transformation de «  $z$  vers  $s$  » :

$$z^{-1} \rightarrow G(s) = \frac{G_B(s)}{G_A(s)}. \quad (2.56)$$

Alors, les filtres recherchés sont :

$$\hat{H}_m(s) = H_m(z)|_{z^{-1}=G(s)}. \quad (2.57)$$

Une transformation  $G(s)$  est cherchée afin de minimiser l'erreur :

$$\epsilon_m = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \hat{H}_m(j\omega/T) - H_m(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega. \quad (2.58)$$

Des transformations de «  $z$  vers  $s$  » ayant de bonnes performances supposent des degrés élevés pour les polynômes  $G_B(s)$  et  $G_A(s)$  en (2.56). Ceci signifie que l'ordre des filtres analogiques qui en résultent est élevé, ce qui amplifie les problèmes liés à l'imprécision de l'implémentation.

La synthèse des BFH est une tâche plus difficile que la synthèse des bancs de filtres numériques à cause de l'imprécision de réalisation des structures analogiques. Les erreurs d'implémentation des éléments analogiques introduisent des erreurs de distorsion et de repliement dans le signal de sortie ce qui se traduit finalement par la diminution de la précision de la conversion. Par conséquent, une approche de la synthèse des BFH qui parte des filtres analogiques et qui trouve les filtres numériques adaptés semble plus prometteuse de ce point de vue. Velazquez [93], [90] a développé des méthodes qui élaborent les filtres de synthèse à partir de filtres d'analyse quelconques. Pour trouver les filtres de synthèse, il utilise des méthodes d'approximation des réponses fréquentielles idéales des filtres de synthèse. Mais un critère d'optimisation global fournirait sans doute de meilleurs résultats. Par ailleurs, il optimise les pôles et les zéros des filtres d'analyse à l'aide d'un critère global mais il serait plus réaliste d'optimiser les paramètres des filtres d'analyse liés à l'implémentation comme la fréquence centrale et le facteur de qualité par exemple. D'autre part, il met en oeuvre ces méthodes pour des filtres d'analyse d'ordre assez élevé or il serait plus facile de réaliser des filtres analogiques d'ordre faible (inférieur ou égal à deux).

Quant aux méthodes de Löwenborg et al. [41], [43], [47] , elles sont conçues pour un type bien défini de fonctions de transfert des filtres d'analyse et dans le cas de BFH à deux voies seulement.

Shu et al. [77] transforment la résolution des équations de reconstruction parfaite dans un problème d'optimisation  $\mathcal{H}_\infty$  comprenant seulement des systèmes en temps discret. Ce problème est résolu en utilisant des techniques connues de la théorie de l'automatique et un exemple de synthèse d'un BFH est donné. Cependant, la complexité du problème d'optimisation augmente d'une manière très importante avec le nombre des voies du banc.

### 2.3.3 Critères d'évaluation d'un banc de filtres hybrides

Afin de comparer différentes méthodes de synthèse, il faut établir des critères de performance pour les BFH. Nous considérerons ici, comme la littérature, la distorsion et le repliement.

#### Distorsion

C'est la grandeur qui caractérise l'écart entre la transmittance globale du BFH et la transmittance idéale qui est un retard. On calcule donc la fonction :

$$R(\omega) = \frac{T_0(e^{j\omega})}{ce^{-j\omega d}} \quad (2.59)$$

où  $T_0(e^{j\omega})$  est le terme de distorsion défini par l'expression (2.27) pour  $p = 0$  et  $ce^{-j\omega d}$  est la fonction de transfert idéale du BFH. D'après l'équation pour  $p = 0$  du système (2.35) (reconstruction parfaite), la fonction  $R(\omega)$  a idéalement un module unitaire et une phase nulle. Pour des valeurs  $\omega_k$  équiréparties sur  $[-\pi, \pi[$ , on caractérise la distorsion en module par la valeur maximale  $max_{module}$  de  $|R(\omega_k)|$  avec la formule (2.60).

$$max_{module} = \max_k |R(\omega_k)| \quad (2.60)$$

De même, on caractérise la distorsion en phase par la valeur maximale  $max_{phase}$  de  $|\arg(R(\omega))|$  par la formule (2.61).

$$max_{phase} = \max_k |\arg(R(\omega_k))| \quad (2.61)$$

#### Repliement

En ce qui concerne le repliement, on peut calculer chaque terme de repliement et en déduire certaines caractéristiques telles que valeurs moyennes et valeurs maximales de chacun. Cela engendre  $2 \times 2(M - 1)$  valeurs. Il devient alors difficile de comparer deux BFH. Nous proposons de faire une synthèse de ces caractéristiques au prix de quelques hypothèses simplificatrices. On suppose que l'on peut assimiler les repliements à des bruits décorrélés entre eux. Dans ce cas, les puissances des repliements s'ajoutent. Nous définissons donc le repliement total par la somme de repliement au sens des puissances. La densité spectrale de puissance de ce repliement total est donc :

$$\begin{aligned}
S_r(\omega) &= \sum_{p=-(M-1)}^{M-1} \left| T_p(e^{j\omega}) X \left( j \frac{(\omega - 2\pi p/M)}{T} \right) \right|^2 \\
&= \sum_{p=-(M-1)}^{M-1} |T_p(e^{j\omega})|^2 \left| X \left( j \frac{(\omega - 2\pi p/M)}{T} \right) \right|^2
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Si l'on suppose que le signal d'entrée est large-bande et tel que sa densité spectrale de puissance est constante (et égale à  $S_X$ ) sur toute la bande, alors :

$$S_r(\omega) = \sum_{p=-(M-1)}^{M-1} |T_p(e^{j\omega})|^2 S_X \tag{2.63}$$

La puissance du repliement total sur toute la bande est donc :

$$P_r = S_X \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{p=-(M-1)}^{M-1} |T_p(e^{j\omega})|^2 d\omega \tag{2.64}$$

Si on appelle  $SNR_r$  le rapport signal sur bruit qui en découle :

$$SNR_r = -10 \log_{10} \left( \frac{S_X}{P_r} \right) = -10 \log_{10} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{p=-(M-1)}^{M-1} |T_p(e^{j\omega})|^2 d\omega \right) \tag{2.65}$$

On approche cette expression en calculant l'intégrale numériquement par la méthode des rectangles pour les pulsations  $\omega_k$ . D'où :

$$SNR_r \simeq -10 \log_{10} \left( \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sum_{p=-(M-1)}^{M-1} |T_p(e^{j\omega_k})|^2 \right) \tag{2.66}$$

Pour chaque BFH, on donnera la représentation (en dB) de la fonction repliement total définie comme suit :

$$RepliementTotal(\omega) = \sum_{p=-(M-1)}^{M-1} |T_p(e^{j\omega})|^2 \tag{2.67}$$

Cette fonction représente la densité spectrale de puissance du repliement total en considérant un signal d'entrée de densité spectrale uniforme. La valeur moyenne et la valeur maximale de cette fonction seront données pour tous les BFH. La valeur moyenne correspond à la valeur de  $-SNR_r$ . Ces caractéristiques seront inscrites dans les tableaux de résultats sous le terme de repliement total moyen et maximal.

### 2.3.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons décrit deux techniques qui permettent d'élargir la bande de la conversion analogique/numérique.

Une première technique est l'entrelacement temporel. Cette technique est utilisée en pratique : par exemple en mettant en parallèle 80 convertisseurs 8 bit à 250 MÉch/s, Agilent fabrique un convertisseur analogique/numérique 8 bit à 20 GÉch/s.

Une deuxième technique est la décomposition à bancs de filtres hybrides.

Les deux techniques utilisent un nombre de convertisseurs analogique/numérique fonctionnant en parallèle à une fréquence d'échantillonnage inférieure à la fréquence d'échantillonnage de la conversion globale.

Les erreurs d'appariement de gain, de phase et de décalage des CAN limitent la résolution de ces deux structures de type parallèle. Velazquez [90] et Petraglia [63] montrent que les BFH à temps discret atténuent les erreurs d'appariement de gain et de phase entre les convertisseurs analogique/numérique de branche. Plus l'atténuation des filtres est grande plus l'effet de ces erreurs est atténué. On montre ici que les mêmes résultats sont obtenus dans le cas d'un BFH à temps continu. Les erreurs de décalage ne sont pourtant pas atténuées. L'avantage de la décomposition fréquentielle utilisant des BFH consiste donc dans leur propriété d'atténuation des erreurs d'appariement de gain et de phase.

Les méthodes de synthèse classiques ne prennent pas en compte les difficultés de réalisation. Les structures des filtres d'analyse doivent être facilement réalisables. C'est la raison pour laquelle dans le Chapitre 3 on étudie des méthodes de synthèse des BFH adaptées à des structures d'analyse très simples.

---

## Chapitre 3

# Méthodes de synthèse de BFH adaptées aux contraintes de réalisation

Nous avons vu dans le Chapitre 2 l'intérêt des structures parallèles pour élargir les bandes de conversion. De plus, les systèmes à décomposition fréquentielle comme les BFH ont un avantage devant les systèmes à entrelacement temporel qui est d'atténuer les erreurs d'appariement entre les CAN des différentes voies.

La suite de l'étude concerne les méthodes de synthèse des BFH qui nous donnent les fonctions de transfert des bancs d'analyse et de synthèse. Tout d'abord, pour orienter ce travail, nous avons tenté d'anticiper les limitations et les difficultés de réalisation d'un BFH. Or les BFH font appel à trois domaines que sont le filtrage analogique, la conversion analogique/numérique et le filtrage numérique.

En ce qui concerne la partie numérique, la limitation vient de la vitesse d'exécution, de la puissance calculatoire disponible et de la précision des calculs. Il est évident que l'évolution de la technologie permettra de repousser ces limites. Mais il faudra néanmoins toujours chercher à minimiser la taille et la consommation du banc de synthèse numérique.

Les convertisseurs analogique/numérique sont limités en fréquence d'échantillonnage et en résolution. C'est d'ailleurs pour cela que l'on étudie les BFH afin d'augmenter la fréquence d'échantillonnage tout en conservant une bonne résolution. D'autre part, pour utiliser des convertisseurs dans une structure à BFH, la bande d'entrée de chaque CAN doit être au moins égale à la fréquence maximale du signal

à convertir. Si on considère un convertisseur analogique/numérique composé d'un échantillonneur-bloqueur suivi d'un bloc de conversion, il est donc nécessaire de disposer d'un échantillonneur-bloqueur plus rapide que le bloc de conversion (par exemple, pour un BFH à huit voies sur la bande de 0-1GHz, les CAN fonctionneront à la fréquence d'échantillonnage de 125 Méc/s mais devront admettre en entrée des signaux jusqu'à 1 GHz).

Côté analogique, l'intégration d'un filtre analogique hautes fréquences est délicate. Les difficultés sont d'autant plus grandes que l'ordre du filtre est élevé ou que le facteur de qualité est grand. Et surtout, les imperfections de réalisation vont jusqu'à 20% d'erreur, voire plus, sur les valeurs des composants passifs. De plus, ces imperfections évoluent dans le temps (en fonction du vieillissement et de la température). Dans le cadre des BFH, de telles différences entraînent des erreurs très importantes sur la reconstruction du signal (voir le dernier chapitre de la thèse).

Finalement, la partie analogique est sans doute la plus contraignante à réaliser dans le cadre des BFH à cause des imperfections de réalisation. Pour résoudre ce problème, une première idée est d'utiliser une structure réglable (tuning). Mais il s'agit là de structures d'autant plus complexes que la précision exigée est grande et qui sont donc coûteuses. La stratégie qui a été ici retenue est de relâcher les contraintes sur la réalisation de l'analogique. Les filtres analogiques sont donc des résonateurs quelconques. Ils peuvent donc être choisis les plus simples possibles. Les erreurs engendrées par la réalisation doivent être compensées dans la partie numérique. Pour cela, on peut imaginer des solutions comme la calibration (voir le Chapitre 4 de la thèse de Tudor Petrescu). On pense aussi à estimer les erreurs à l'aide d'algorithmes auto-régressifs [33] ou d'estimation aveugle (thèse de Davud Asemani en cours).

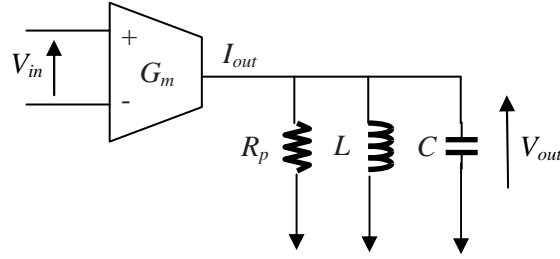
## 3.1 Filtres analogiques envisageables

Pour un résonateur, plusieurs structures de réalisation sont possibles. On peut différencier les résonateurs purement électriques des résonateurs électro-mécaniques. Parmi les résonateurs purement électriques nous envisageons les circuits LC et les résonateurs à simulation d'inductance (gyrateur). Parmi les résonateurs électro-mécaniques, nous pensons aux filtres à onde de surface (SAW), aux filtres à ondes de volume (BAW) et aux micro-systèmes de type MEMS.

### 3.1.1 Exemples de réalisation des résonateurs

#### Résonateurs purement électriques

La réalisation la plus naturelle d'un résonateur est une structure de type LC. En pratique, on parle plus souvent de Gm-LC car il s'avère presque toujours nécessaire d'amplifier le signal. Le schéma de principe de ce type de résonateur est donné dans la figure 3.1.  $R_p$  est la résistance parasite présente en sortie de la transconductance. L'expression (3.1) donne la fonction de transfert de ce circuit.



**Fig. 3.1** – Résonateur Gm-LC

$$H(s) = \frac{\frac{G_m}{C}s}{s^2 + \frac{1}{R_p C}s + \frac{1}{LC}} \quad (3.1)$$

L'inconvénient de cette solution est la surface occupée par l'inductance sur le circuit. D'autre part, si plusieurs inductances cohabitent sur une même puce, (ce qui serait le cas pour un banc de résonateurs), des phénomènes de couplage apparaissent. L'avantage est une bonne linéarité car il y a moins de composants actifs que dans les solutions à simulation d'inductance présentées ci-après.

Une alternative est d'utiliser des structures de type Gm-C utilisant le principe du gyrateur [82]. Cela consiste à simuler le comportement d'une inductance à l'aide d'une capacité et de deux transconductances. Ce principe est illustré par la figure 3.2.

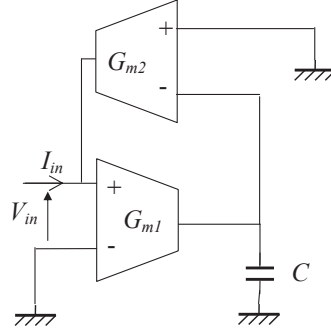
L'expression (3.2) donne l'impédance équivalente de ce circuit.

$$Z = \frac{V_{in}}{I_{in}} = \frac{sC}{G_{m1}G_{m2}} \quad (3.2)$$

Cette structure se comporte donc comme une inductance de valeur :

$$L = \frac{C}{G_{m1}G_{m2}} \quad (3.3)$$

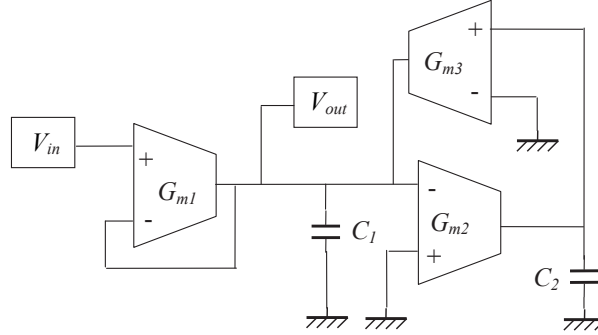




**Fig. 3.2** – *Principe du gyrateur*

Les gyrateurs sont à la base de nombreux filtres analogiques. Ils doivent être combinés avec des éléments passifs pour réaliser des filtres passe-bas ou passe-bande. Un résonateur Gm-C présente l'avantage d'un moindre coût car il est réalisable dans des technologies standards. Nous présentons ici deux structures possibles pour réaliser un résonateur d'ordre 2.

Circuit I :



**Fig. 3.3** – *Résonateur Gm-C - circuit I*

Le filtre présenté dans la figure 3.3 a la fonction de transfert suivante :

$$V_{out}/V_{in} = \frac{s \frac{C_2 G_{m1}}{G_{m2} G_{m3}}}{s^2 \frac{C_1 C_2}{G_{m2} G_{m3}} + s \frac{C_2 G_{m1}}{G_{m2} G_{m3}} + 1} \quad (3.4)$$

Ainsi la fréquence centrale est :

$$\omega_c = \sqrt{\frac{G_{m2} G_{m3}}{C_1 C_2}} \quad (3.5)$$

et le facteur de qualité :

$$Q = \sqrt{\frac{G_{m2} G_{m3}}{G_{m1}}} \quad (3.6)$$

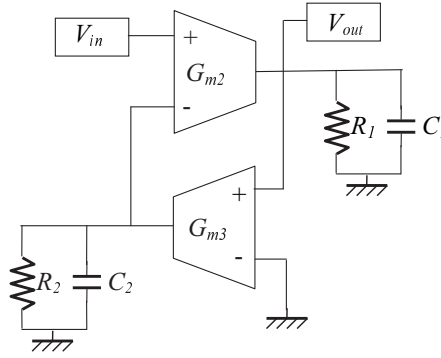
Étant donnée la symétrie des rôles de  $C_1$  avec  $C_2$  et  $G_{m2}$  avec  $G_{m3}$ , il est naturel de choisir les mêmes valeurs pour les deux capacités, ainsi que pour  $G_{m2}$  et  $G_{m3}$ . La transconductance  $G_{m1}$  est assimilable à une résistance et influe sur le coefficient de qualité. En se donnant des valeurs pour  $G_{m2}$  et  $G_{m3}$ , il est possible d'agir sur la fréquence centrale par l'intermédiaire des capacités. Si on prend en compte la résistance parasite de sortie  $R_p$  de la transconductance  $G_{m2}$ , on obtient alors la transmittance suivante :

$$V_{out}/V_{in} = \frac{G_{m1}(1 + R_p C_2 s)}{s^2(R_p C_2 + C_1) + s(G_{m1} R_p C_2 + C_1) + G_{m1} + R_p G_{m2} G_{m3}} \quad (3.7)$$

On constate donc que cette transmittance comporte une composante passe-bas.

On peut citer [18] qui utilise ce type de circuit pour réaliser un banc de filtres pour des signaux audio-fréquence.

Circuit II :



**Fig. 3.4** – Résonateur  $Gm$ - $C$  - circuit II

Pour réaliser un résonateur selon ce principe, il faut placer des résistances ( $R_1$  et  $R_2$ ) afin de régler le facteur de qualité. La fonction de transfert de ce circuit est :

$$V_{out}/V_{in} = \frac{sC_2 G_{m2} + \frac{G_{m2}}{R_2}}{s^2 C_1 C_2 + s \frac{R_1 C_1 + R_2 C_2}{R_1 R_2} + \frac{1 + G_{m2} G_{m3} R_1 R_2}{R_1 R_2}} \quad (3.8)$$

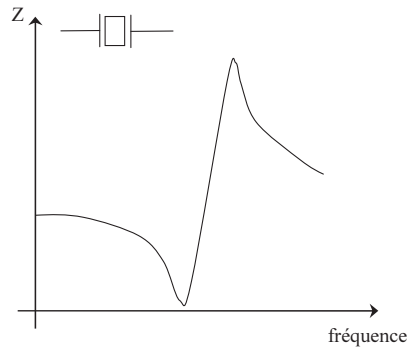
On remarque que cette transmittance comporte une composante passe-bas.

La solution  $Gm$ - $C$  est sans doute plus économique que la solution  $Gm$ - $LC$  car elle est plus facile à intégrer. Par contre, ce type de circuit est plus défavorable sur le plan de la linéarité.

## Résonateurs électro-mécaniques

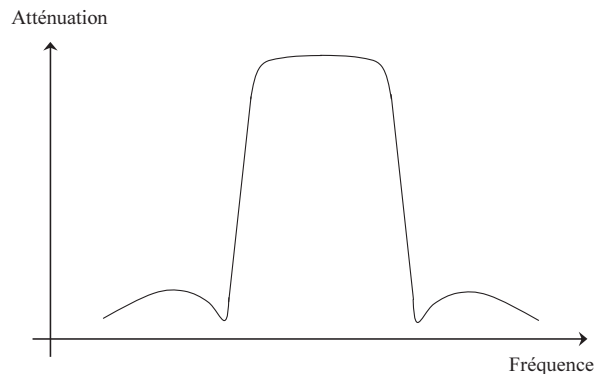
Les filtres à ondes de surface ou SAW (Surface Acoustic Wave) utilisent l'effet piézo-électrique pour convertir l'énergie électrique en énergie mécanique et vice-versa. Ils sont couramment utilisés pour réaliser les filtres d'antenne en télécommunications mobiles. Les facteurs de qualité peuvent aller jusqu'à 400 à des fréquences jusqu'à 2 GHz.

Les filtres à ondes de volume ou BAW (Bulk Acoustic Wave) utilisent le même principe de propagation d'une onde acoustique mais dans ce cas, l'onde se propage dans l'épaisseur du matériau piézo-électrique. L'impédance d'un résonateur BAW se caractérise par une fréquence de résonance et une fréquence d'anti-résonance (voir figure 3.5).



**Fig. 3.5** – *Module de l'impédance d'une résonateur BAW*

En assemblant plusieurs résonateurs BAW, on construit des filtres passe-bande dont la réponse fréquentielle ressemble à celle de la figure 3.6. Les résonateurs BAW



**Fig. 3.6** – *Exemple de module de la réponse fréquentielle d'un filtre BAW*

offrent des facteurs de qualité et des fréquences plus élevées que les filtres SAW ( $Q$

jusqu'à 1500 à des fréquences jusqu'à 20 GHz). Cette technologie émergente est prometteuse essentiellement grâce à sa grande capacité d'intégration [52]. Ainsi ce type de filtre est envisagé pour réaliser des filtres RF [74].

Enfin, on peut citer aussi les résonateurs mécaniques de la famille des MEMS (Micro-Electro-Mechanical Systems) [30]. Ils sont reconnus pour leurs facteurs de qualité très élevés.

En conclusion, la solution la plus économique est sans doute celle à simulation d'inductance. Par contre, elle est certainement la moins performante sur le plan de la linéarité. À l'opposé, les filtres passifs LC présentent surement une bonne linéarité mais ils sont coûteux car les inductances occupent une grande surface. Les filtres à ondes de volume sont peut-être un bon compromis entre coût et linéarité par rapport à notre application.

### 3.1.2 Hypothèse sur les filtres d'analyse

Tout circuit a des caractéristiques limitées en terme de rapport signal sur bruit et en terme de linéarité. Mais pour notre étude, nous supposons ces caractéristiques idéales. Il faudra bien sûr prendre en compte ces phénomènes dans le calcul du rapport signal sur bruit et de la linéarité du circuit final.

De plus, quelle que soit la structure retenue, on n'obtient pas une transmittance de résonateur pur. Il y a la plupart du temps une composante passe-bas due à l'influence de composants parasites ou alors une réjection de fréquence comme pour les filtres BAW par exemple. Néanmoins, il nous faut partir d'une fonction de transfert connue pour valider les méthodes de conception des BFH. Étant donnée la diversité des structures de réalisation que nous avons envisagées, nous prendrons comme fonction de transfert des filtres d'analyse, celle d'un résonateur pur d'ordre deux dont l'expression est donnée par (3.9). Il s'agit donc d'une approximation mais qui n'est pas gênante car les filtres de synthèse sont élaborés à partir de filtres d'analyse quelconques.

$$H_m(s) = \frac{\frac{\Omega_m}{Q_m}s}{s^2 + \frac{\Omega_m}{Q_m}s + \Omega_m^2} \quad (3.9)$$

où  $\Omega_m$  est la fréquence de résonance du résonateur et  $Q_m$  son facteur de qualité (ou coefficient de surtension). On numérottera toujours les filtres d'analyse par fréquence de résonance croissante. Nous avons supposé que tous les filtres ont un gain de 1.

Dans le cas des BFH passe-bas, il est nécessaire qu'au moins un des filtres ait une composante passe-bas afin que le signal basse-fréquence puisse être reconstruit. Nous avons choisi que le premier filtre du banc soit un filtre RC du premier ordre dont on donne la fonction de transfert dans (3.10).

$$H_1(s) = \frac{\Omega_1}{s + \Omega_1}, \quad \Omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1}. \quad (3.10)$$

Plusieurs bancs d'analyse ont été choisis pour élaborer nos BFH. Chaque banc d'analyse a un label associé du type « Banc $x$  » avec  $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ . L'annexe D donne les caractéristiques de tous ces bancs (fréquences de résonance et facteurs de qualité).

## 3.2 Intérêt d'un faible sur-échantillonnage du signal d'entrée

Pour faciliter la lecture, nous rappelons ci-après quelques résultats obtenus précédemment. Nous avons montré dans le paragraphe 2.3.1 que si le signal d'entrée d'un BFH est de bande limitée à  $\pi/T$ , la sortie du banc de filtres représenté en figure 2.11 est :

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{p=-(M-1)}^{M-1} T_p(e^{j\omega}) X\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right)$$

avec :

$$T_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M H_m\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right) F_m(e^{j\omega}).$$

Les conditions de reconstruction parfaite sont :

$$T_p(e^{j\omega}) = \begin{cases} ce^{-j\omega d}, & p = 0 \\ 0 & , p \in \{-(M-1), \dots, -1, 1, \dots, M-2, M-1\}. \end{cases}$$

Nous avons également montré que, pour chaque pulsation normalisée  $\omega$  avec  $-\pi < \omega \leq \pi$ , dans l'expression de  $Y(e^{j\omega})$ , seulement  $M$  termes sont différents de zéro.

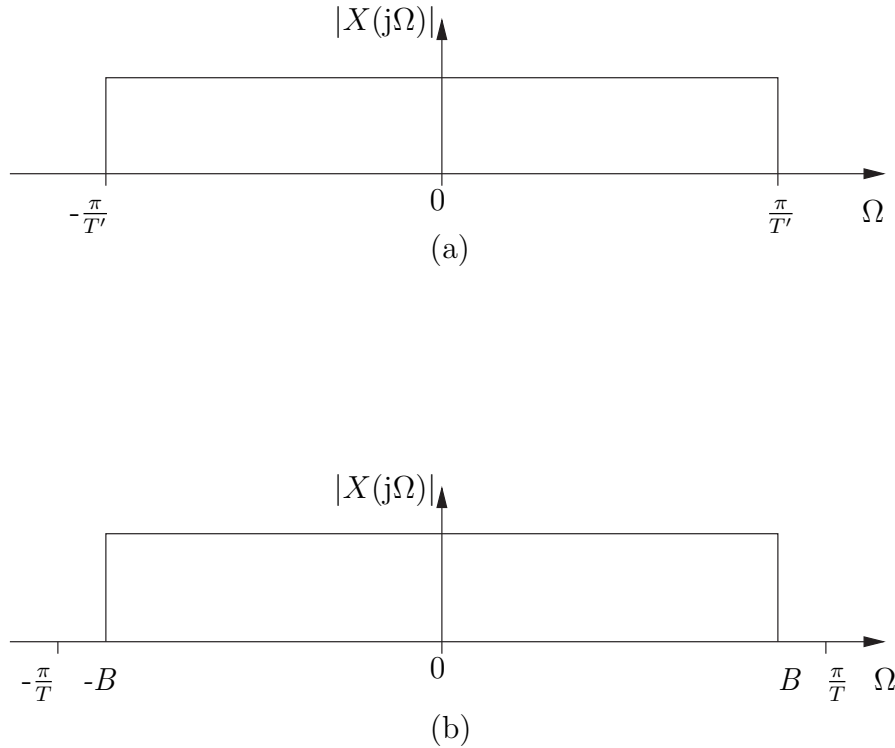
### 3.2.1 Influence d'un faible sur-échantillonnage du signal d'entrée sur les performances des BFH

Supposons une synthèse de BFH sur toute la bande du signal d'entrée  $[-\frac{\pi}{T'}, \frac{\pi}{T'}[$  voir figure 3.7-(a). On remarque souvent que la fonction de repliement  $T_p(e^{j\omega})$  a

des valeurs très grandes autour des pulsations normalisées  $\Omega'_{p+} = \frac{2\pi p}{MT'} - \frac{\pi}{T'}$  pour  $p > 0$  et  $\Omega'_{p-} = \frac{2\pi p}{MT'} + \frac{\pi}{T'}$  pour  $p < 0$  (voir l'exemple de synthèse par la méthode ALMC - paragraphe 3.3.2). Par conséquent, on constate une grande puissance de bruit de repliement autour de ces fréquences. En revanche, supposons un léger sur-échantillonnage du signal d'entrée voir figure 3.7-(b) où :

$$B = \frac{\pi}{T'} = \eta \frac{\pi}{T}.$$

Maintenant, le spectre du signal d'entrée occupe un intervalle  $[-\eta \frac{\pi}{T}, \eta \frac{\pi}{T}]$ ,  $0 < \eta < 1$ ,  $\eta$  très proche de 1 pour garder la fréquence d'échantillonnage très proche de la fréquence de Nyquist. Le bruit de repliement autour des fréquences  $\Omega_{p+} = \frac{2\pi p}{MT} - \frac{\pi}{T}$  et  $\Omega_{p-} = \frac{2\pi p}{MT} + \frac{\pi}{T}$  est éliminé. Le facteur de sur-échantillonnage du signal d'entrée est  $1/\eta$ .



**Fig. 3.7** – Représentation schématique du spectre du signal d'entrée pour un échantillonnage à la fréquence de Nyquist (a), et pour un léger sur-échantillonnage (b)

De la même manière, la fonction de distorsion est souvent dégradée à la fin de la bande (autour de  $\frac{\pi}{T}$ ). Mais, si  $X(j\Omega) = 0$ , pour  $\Omega$  autour de  $\frac{\pi}{T}$  grâce à la limitation

de la bande (ou au sur-échantillonnage), cette distorsion n'apparaît pas dans le signal de sortie. Ceci est illustre dans le paragraphe 3.3.2.

### 3.2.2 Utilisation d'un faible sur-échantillonnage dans le processus de synthèse des BFH

Si les filtres d'analyse sont donnés et si on cherche les filtres de synthèse tels que le BFH soit à reconstruction parfaite, les conditions (2.35) forment un système de  $M$  équations avec  $M$  inconnues (les filtres de synthèse) pour chaque intervalle [26] :

$$I_k = ] -\pi/T + 2\pi(k-1)/MT, -\pi/T + 2\pi k/MT[, \quad k \in \{1, 2, \dots, M\}. \quad (3.11)$$

Soit  $F_{mk}(e^{j\omega})$ ,  $m \in \{1, 2, \dots, M\}$  la solution du système (2.35) écrit pour l'intervalle  $I_k$ . En général,  $F_{mk}(e^{j\omega})$  et  $F_{m+1,k}(e^{j\omega})$  n'ont pas les mêmes valeurs pour  $\omega = -\pi + 2\pi k/M$ . Par exemple, on prend le banc de filtres analogique avec 3 voies de l'exemple 1 cité dans le paragraphe 2.3.1. La fonction de transfert du filtre analogique sur la troisième branche est :

$$F_3(j\Omega) = \begin{cases} -E \frac{1}{2a^2}, & -\frac{\pi}{T} < \Omega < -\frac{\pi}{3T} \\ E \frac{1}{a^2}, & -\frac{\pi}{3T} < \Omega < \frac{\pi}{3T} \\ -E \frac{1}{2a^2}, & \frac{\pi}{3T} < \Omega < \frac{\pi}{T} \end{cases} \quad (3.12)$$

avec  $E = cMT e^{-j\Omega dT}$  et  $a = 2\pi/3T$ .

On voit clairement que  $F_3(j\Omega)$  n'est pas continue en  $\Omega = -\frac{\pi}{3T}$  et en  $\Omega = \frac{\pi}{3T}$ . Puisque le filtre numérique correspondant est construit en échantillonnant la réponse impulsionnelle du filtre analogique à la période  $T$  (voir Annexe B) on peut dire que  $F_3(e^{j\omega})$  est également discontinue en  $\omega = -\frac{\pi}{3}$  et en  $\omega = \frac{\pi}{3}$ .

Les discontinuités que l'on peut constater rendent la synthèse des filtres numériques difficile. Si l'on prend le cas des filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF), une discontinuité de la transformée de Fourier implique un nombre infini (ou très grand pour une bonne approximation) de coefficients pour la réponse impulsionnelle. Ceci est évidemment impossible à implémenter en pratique et l'on est contraint d'utiliser une troncature de la réponse impulsionnelle. La transformée de Fourier de la réponse

impulsionnelle tronquée sera seulement une approximation de la transformée de Fourier initiale, présentant la discontinuité. Dans les calculs antérieurs on a supposé que le signal d'entrée est de bande limitée à  $\pi/T$ . Supposons maintenant que, grâce à un sur-échantillonnage, le spectre du signal d'entrée occupe seulement un intervalle :

$$-\eta \frac{\pi}{T} < \Omega < \eta \frac{\pi}{T}$$

avec  $\eta$  étant un nombre réel, positif, inférieur à 1, et très proche de 1. Il y a des cas (voir paragraphes 3.3.3 ou 3.5) où les conditions de reconstruction parfaite sont utilisées pour former divers critères d'erreur que l'on minimise ensuite. Dans ces cas, avant de former le critère à minimiser, ces conditions peuvent être relâchées pour les pulsations :

$$\eta \frac{\pi}{T} < |\Omega| < \frac{\pi}{T}.$$

Ceci peut être fait à l'aide d'une fonction de pondération :

$$W(j\Omega) = \begin{cases} r_1, & -\eta \frac{\pi}{T} < \Omega < \eta \frac{\pi}{T} \\ r_2, & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.13)$$

où  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1, r_2 > 0$  et  $r_1 \gg r_2$ . On écrit alors les conditions de reconstruction parfaite de la manière suivante :

$$T_p^W(e^{j\Omega T}) = \begin{cases} ce^{-j\Omega T d} W(j\Omega), & p = 0 \\ 0, & p \in \{-(M-1), \dots, -1, 1, \dots, M-1\} \end{cases} \quad (3.14)$$

où

$$T_p^W(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M F_m(e^{j\omega}) H_m(j\Omega - j \frac{2\pi p}{MT}) W(j\Omega - j \frac{2\pi p}{MT}). \quad (3.15)$$

L'intérêt de cette fonction de pondération est qu'on relâche les contraintes sur les fonctions de repliement (et de distorsion) autour des fréquences des discontinuités  $\Omega = -\pi/T + 2\pi k/MT, k \in \{1, 2, \dots, M-1\}$ .

Dans le cas des filtres de synthèse RIF, ne pas tenter de reproduire les discontinuités dans le processus de synthèse permettra de mieux approcher les autres parties de la fonction de transfert.

On a donc vu que le sur-échantillonnage améliore les performances. Autrement dit, pour un signal de bande limitée donnée, on a intérêt à le sur-échantillonner d'un facteur  $\frac{1}{\eta}$ .



Le sur-échantillonnage du signal d'entrée a donc un impact sur les performances d'un BFH donné et d'autre part un impact sur la synthèse du BFH si la méthode de synthèse permet de prendre en compte cette hypothèse. Afin de ne pas confondre ces deux cas, nous adopterons la convention suivante: quand il s'agira de sur-échantillonner simplement le signal d'entrée on notera  $1/\eta_X$  le facteur de sur-échantillonnage (ou  $\eta_X$  le facteur de limitation de la bande, puisque limiter la bande ou suréchantillonner sont équivalentes du point de vue des calculs, dans notre cas). Quand ce sur-échantillonnage est en plus pris en compte lors de la synthèse, on notera  $1/\eta_S$  le facteur de sur-échantillonnage (ou  $\eta_S$  le facteur de limitation de la bande).

### 3.3 Méthodes exploitant l'échantillonnage de la réponse fréquentielle

Ces méthodes sont basées sur un échantillonnage de la réponse fréquentielle des filtres analogiques d'analyse et des filtres numériques de synthèse. Toutes partent des filtres d'analyse comme données initiales connues et cherchent les filtres de synthèse qui satisfont au mieux les conditions de reconstruction parfaite (2.27), (2.35). Considérant des signaux réels et des coefficients de filtre réels, seules les fréquences positives seront représentées dans les figures.

#### 3.3.1 Utilisation de la transformée de Fourier inverse (TFI)

Velazquez a décrit cette méthode dans [90] pour la synthèse d'un BFH à deux voies dont les filtres d'analyse sont d'ordre supérieur à trois. Nous expliquons son principe et nous l'appliquons à notre choix de banc d'analyse.

##### Principe

On considère une discrétisation uniforme de l'intervalle de pulsation normalisée  $[-\pi, \pi[$ :

$$\mathcal{P} = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}. \quad (3.16)$$

1. On écrit pour chaque fréquence  $\omega_k \in \mathcal{P}$  les équations de reconstruction parfaite

(2.35) :

$$\mathcal{T}_p(\omega_k) = \begin{cases} ce^{-j\omega_k d}, & p = 0 \\ 0 & , p \in \{-(M-1), \dots, -1, 1, \dots, M-1\} \end{cases} \quad (3.17)$$

$k \in \{1, 2, \dots, K\}$ ,

où :

$$\mathcal{T}_p(\omega_k) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathcal{F}_m(\omega_k) H_m(j\Omega_k - j\frac{2\pi p}{MT}) \quad (3.18)$$

et  $\Omega_k T = \omega_k$ . On a montré dans le paragraphe 2.3.1 que, pour un signal d'entrée de bande limitée à  $\frac{\pi}{T}$  et une pulsation normalisée  $\omega_k$  avec  $-\pi < \omega_k < \pi$ , il y a uniquement  $M$  termes de repliement qui interviennent (la somme (2.34) contient uniquement  $M$  termes non nuls). Donc, les équations (3.17) constituent un système de  $M$  équations avec  $M$  inconnues. Les inconnues sont  $\mathcal{F}_m(\omega_k)$ , pour  $m \in \{1, \dots, M\}$ , c'est-à-dire les réponses fréquentielles des filtres de synthèse en  $\omega = \omega_k$ . On écrit ce système pour tous les  $\omega_k \in \mathcal{P}$  et on obtient donc  $K$  systèmes de  $M$  équations avec  $M$  inconnues. Toutes les solutions des systèmes nous donnent donc les échantillons des fonctions  $F_m(e^{j\omega})$  aux pulsations de l'ensemble  $\mathcal{P}$ .

2. Maintenant, on cherche les filtres à réponse impulsionnelle finie qui approchent les réponses fréquentielles dont les valeurs ont été obtenues précédemment. En calculant la transformée de Fourier discrète inverse des  $\{\mathcal{F}_m(\omega_k)\}$  on trouve  $M$  réponses impulsionnelles de longueur  $K$ . Les réponses impulsionnelles des filtres sont donc :

$$f_n^{(m)} = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \mathcal{F}_m(\omega_k) e^{j2\pi kn/K} \quad (3.19)$$

et  $m \in \{1, \dots, M\}$ .

3. Si on choisit une discrétisation très fine de l'intervalle de fréquence  $[-\pi, \pi[$ , le nombre  $K$  de coefficients est grand, ce qui rend l'implémentation complexe. On essaiera donc d'obtenir des séquences plus courtes. Pour cela, on effectue une troncature des réponses impulsionnelles obtenues en calculant la transformée de Fourier discrète inverse. Soit  $g_m(n)$  les réponses impulsionnelles des filtres

obtenues par la limitation de la longueur des séquences  $f_n^{(m)}$  :

$$g_m(n) = f_n^{(m)} w(n) \quad (3.20)$$

où

$$w(n) = \begin{cases} 1, & n \in \{0, \dots, K' - 1\} \\ 0, & n \in \{K', \dots, K - 1\} \end{cases} \quad (3.21)$$

$K' \in \mathbb{N}, 0 < K' < K$  et  $m \in \{1, \dots, M\}$ .

### Simulation et résultats

On considère un BFH à 8 voies pour gagner à peu près un ordre de grandeur en vitesse de conversion. Les paramètres de cette synthèse se trouvent dans le tableau 3.1.

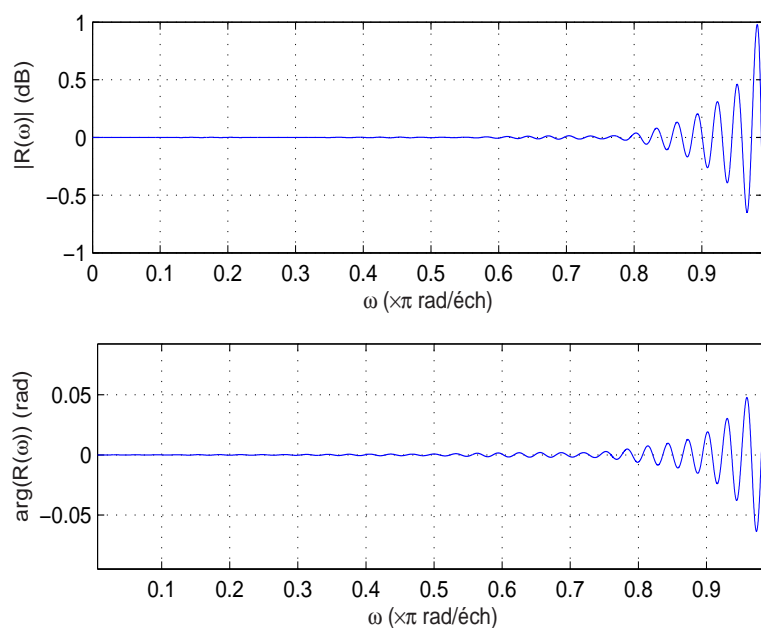
**Tab. 3.1** – Paramètres pour une synthèse par TFI - « Banc1 »

Nb. de voies	$M = 8$
Filtres d'analyse	« Banc1 » (voir annexe D)
Filtres de synthèse	RIF, longueur 128
Nb. de points de fréquence	$K = 256$
Retard	$d = 64$

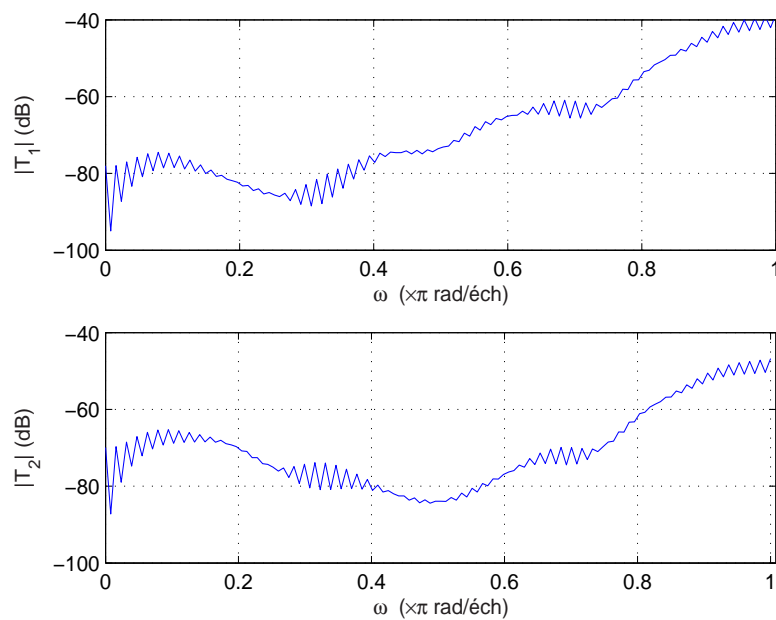
Le système décrit par (3.17) et (3.18) est résolu et les filtres RIF de longueur 256 sont calculés par transformée de Fourier discrète inverse (3.19). Les séquences qui en résultent sont longues et on garde seulement  $K' = 128$  coefficients pour les filtres de synthèse, parce que la différence de performances entre  $K' = 128$  et  $K' = 256$  est très petite. Les filtres d'analyse sont décrits dans l'annexe D.

La fonction de distorsion est représentée dans la figure 3.8.

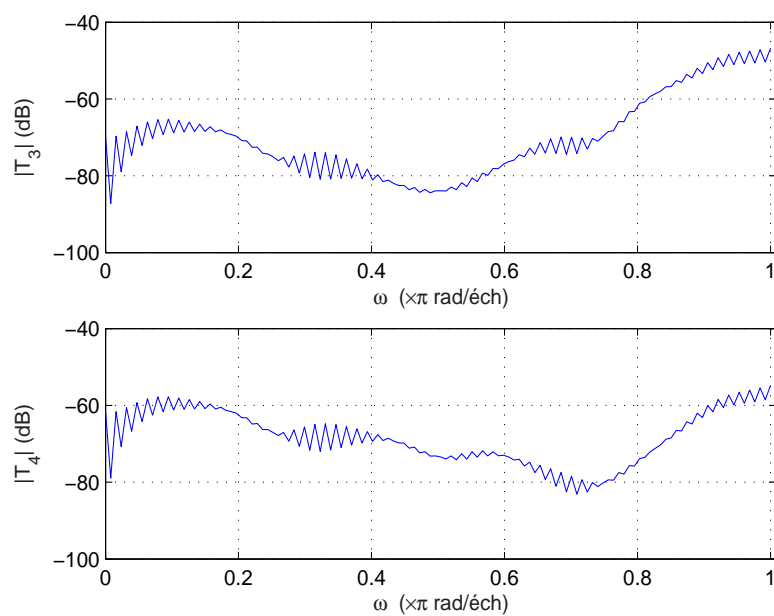
Les figures 3.9 et 3.10 représentent les fonctions de repliement  $T_1(e^{j\omega})$ ,  $T_2(e^{j\omega})$ ,  $T_3(e^{j\omega})$  et  $T_4(e^{j\omega})$ . Les autres fonctions de repliement sont similaires. Dans la figure 3.11, on représente le repliement total dont la densité spectrale de puissance est définie par l'expression (2.67). Une autre simulation, utilisant cette fois des filtres d'analyse Butterworth d'ordre 3 au lieu de résonateurs a été effectuée. Les résultats de ces deux simulations sont résumés dans le tableau 3.2.



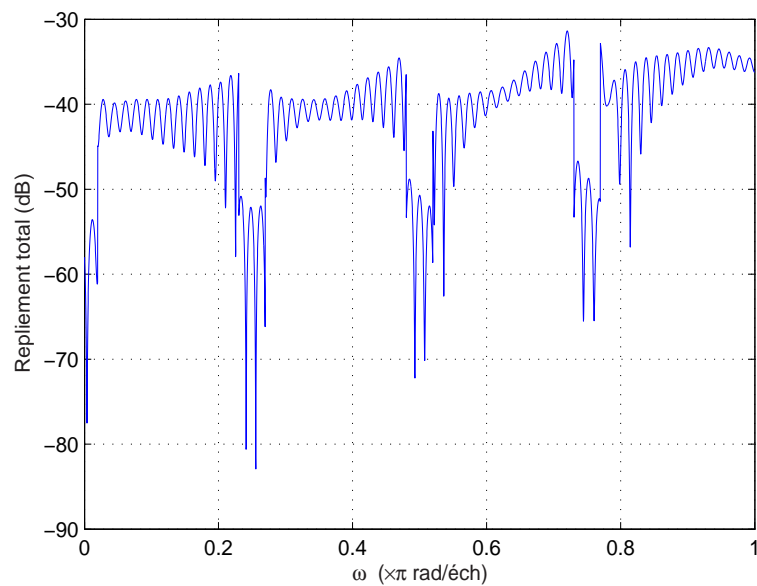
**Fig. 3.8** — *Distorsion - méthode TFI et paramètres du tableau 3.1*



**Fig. 3.9** — *Module des fonctions de repliement  $T_1(e^{j\omega})$  et  $T_2(e^{j\omega})$  - méthode TFI et paramètres du tableau 3.1*



**Fig. 3.10** – *Module des fonctions de repliement  $T_3(e^{j\omega})$  et  $T_4(e^{j\omega})$  - méthode TFI et paramètres du tableau 3.1*



**Fig. 3.11** – *Repliement total - méthode TFI et paramètres du tableau 3.1*

**Tab. 3.2** – *Performances du BFH synthétisé par la méthode TFI avec les paramètres du tableau 3.1*

	Résonateurs (« Banc1 »)	Butterworth
Repliement total moyen (dB)	-39	-45
Repliement total maximum (dB)	-31	-35
Distorsion d'amplitude moyenne (dB)	0.003	$6,5 \cdot 10^{-4}$
Distorsion d'amplitude maximum (dB)	0.9	0.9
Distorsion de phase moyenne (radian)	0.004	0.003
Distorsion de phase maximum (radian)	0.06	0.006

Une autre synthèse utilise des résonateurs avec des facteurs de qualité identiques pour tous les filtres d'analyse (voir les paramètres de cette simulation dans le tableau 3.3).

**Tab. 3.3** – *Paramètres pour une synthèse par TFI - « Banc2 »*

Nb. de voies	$M = 8$
Filtres d'analyse	Banc2 (voir annexe D)
Filtres de synthèse	RIF, longueur 128
Nb. de points de fréquence	$K = 256$
Retard	$d = 64$

Les résultats de cette synthèse sont montrés dans le tableau 3.4. On constate que les performances du BFH avec le « Banc1 » sont meilleures que les performances du BFH avec le « Banc2 ». Ceci est dû au fait que les filtres dans le « Banc1 » sont répartis linéairement dans la bande. On verra d'ailleurs dans le paragraphe 3.5.2 une méthode d'optimisation de la répartition des filtres d'analyse.

### 3.3.2 Approximation locale aux moindres carrés (ALMC)

Dans [93], Velazquez présente cette méthode pour la synthèse d'un BFH à deux voies dont les filtres d'analyse sont d'ordre supérieur à trois. Nous reprenons cette méthode afin de l'appliquer à notre choix de banc d'analyse.

**Tab. 3.4** – *Performances du BFH synthétisé par la méthode TFI avec les paramètres du tableau 3.3*

	Résonateurs (Banc2)
Repliement total moyen (dB)	-24
Repliement total maximum (dB)	-12
Distorsion d'amplitude moyenne (dB)	0.005
Distorsion d'amplitude maximum (dB)	0.9
Distorsion de phase moyenne (radian)	0.0025
Distorsion de phase maximum (radian)	0.017

## Principe

On discrétise l'intervalle  $[-\pi, \pi[$  de manière uniforme sur un grand nombre de points  $K$ .

$$\mathcal{P} = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}. \quad (3.22)$$

1. La première étape est commune à celle de la méthode précédente (utilisation de la TF inverse). Pour chaque pulsation  $\omega_k$  de  $\mathcal{P}$ , on résout le système des équations de reconstruction parfaite pour lequel les inconnues sont les réponses fréquentielles idéales  $\mathcal{F}_m(\omega_k)$ ,  $m$  allant de 1 à  $M$ . On obtient alors les valeurs de la réponse fréquentielle idéale des filtres de synthèse aux pulsations de  $\mathcal{P}$ . Pour cela, le système est résolu par la méthode des moindres carrés.
2. On cherche ensuite à approcher ces réponses fréquentielles idéales par des filtres à réponses impulsionnelles finies  $F_m(z)$  de longueur  $N$ .

$$F_m(z) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n^{(m)} z^{-n}$$

Les coefficients  $\{f_n^{(m)}\}$  sont calculés par minimisation du critère quadratique  $J$  suivant en utilisant un algorithme de type Gauss-Newton.

$$J = \sum_k |\mathcal{F}_m(\omega_k) - F_m(e^{j\omega_k})|^2$$

La différence de cette méthode avec la précédente (TFI) est que le nombre des points de fréquence est indépendant de l'ordre du filtre RIF recherché. Il n'y a donc pas à faire de troncature.

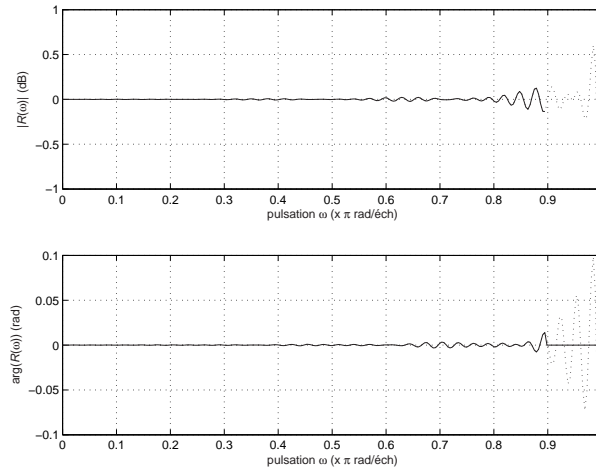
### Simulation et résultats

On calcule un banc de synthèse à partir des paramètres donnés dans le tableau 3.5.

**Tab. 3.5** – Paramètres pour une synthèse par ALMC - « Banc1 »

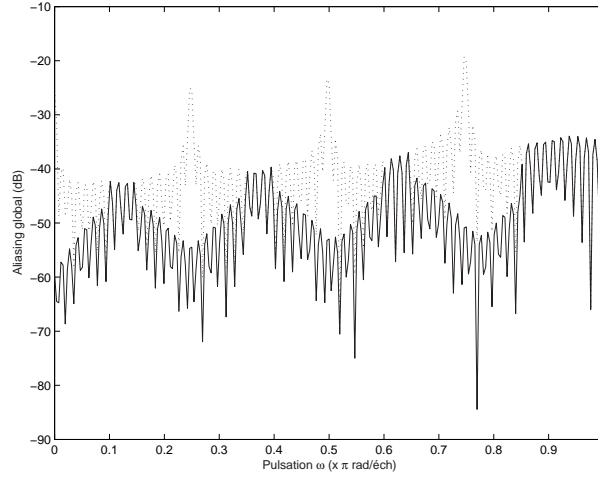
Nb. de voies	$M = 8$
Filtres d'analyse	« Banc1 » (voir annexe D)
Filtres de synthèse	RIF, longueur 128
Nb. de points de fréquence	$K = 256$

Pour ce BFH, deux résultats sont fournis. Le premier résultat donne les performances avec un signal d'entrée couvrant toute la bande ( $\eta_X = 1$ ). Le second donne les performances avec un signal d'entrée couvrant une bande plus restreinte ( $\eta_X = 0.9$ ). Ce dernier cas illustre l'influence d'un faible sur-échantillonnage du signal d'entrée sur les performances d'un BFH vu dans le paragraphe 3.2.1. La figure 3.12 montre la distorsion. La figure 3.13 montre le repliement total. Les résultats sont résumés dans le tableau 3.6.



**Fig. 3.12** – Distorsion - méthode ALMC et paramètres du tableau 3.5. En trait pointillé :  $\eta_X = 1$ . En trait plein :  $\eta_X = 0.9$ .





**Fig. 3.13** – *Repliement total - méthode ALMC et paramètres du tableau 3.5. En trait pointillé :  $\eta_X = 1$ . En trait plein :  $\eta_X = 0.9$ .*

**Tab. 3.6** – *Performances du BFH synthétisé par la méthode ALMC avec les paramètres du tableau 3.5*

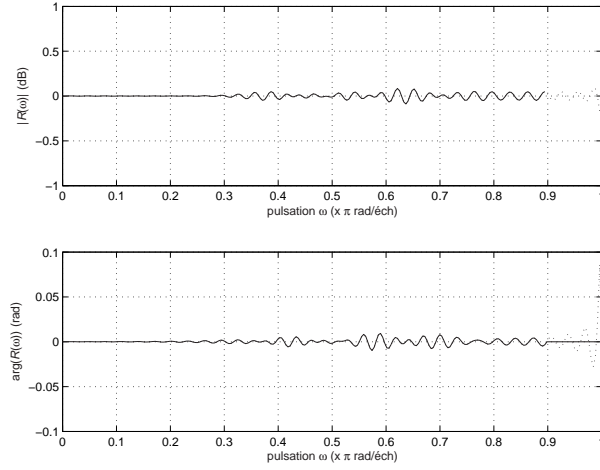
	$\eta_X = 1$	$\eta_X = 0.9$
Repliement total moyen (dB)	-35	-43
Repliement total maximal (dB) (maximum)	-19	-32
Distorsion d'amplitude moyenne (dB)	$-3.1 \cdot 10^{-3}$	$-6.0 \cdot 10^{-4}$
Distorsion d'amplitude maximale (dB)	1.6	0.13
Distorsion de phase moyenne (radian)	$5.4 \cdot 10^{-3}$	$7.5 \cdot 10^{-4}$
Distorsion de phase maximale (radian)	0.3	$1.4 \cdot 10^{-2}$

Une autre synthèse est effectuée à partir du banc d'analyse « Banc2 ». Les paramètres de ce BFH sont récapitulés dans le tableau 3.7.

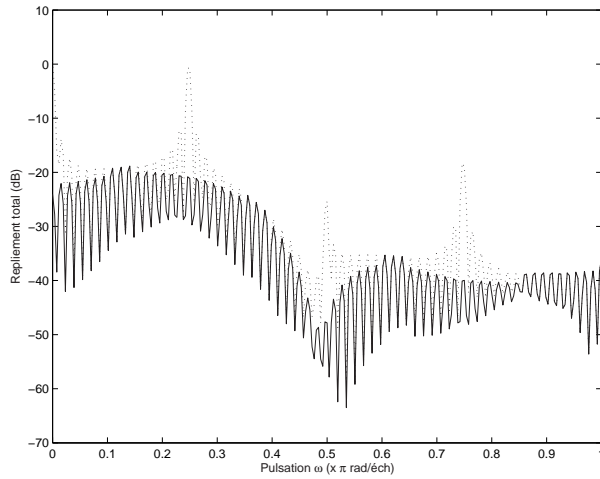
**Tab. 3.7** – *Paramètres pour une synthèse par ALMC - « Banc2 »*

Nb. de voies	$M = 8$
Filtres d'analyse	Banc2 (voir annexe D)
Filtres de synthèse	RIF, longueur 128
Nb. de points de fréquence	$K = 256$

La figure 3.14 montre le terme de distorsion. La figure 3.15 montre le repliement total avec ou sans filtre anti-repliement à l'entrée du BFH. Les résultats sont résumés dans le tableau 3.8.



**Fig. 3.14** – *Distorsion - méthode ALMC et paramètres du tableau 3.7. En trait pointillé :  $\eta_X = 1$ . En trait plein :  $\eta_X = 0.9$ .*



**Fig. 3.15** – *Repliement total - méthode ALMC et paramètres du tableau 3.7. En trait pointillé :  $\eta_X = 1$ . En trait plein :  $\eta_X = 0.9$ .*

### 3.3.3 Approximation globale aux moindres carrés (AGMC)

Dans les deux paragraphes précédents, la synthèse des BFH part des filtres d'analyse considérés connus et trouve les réponses fréquentielles idéales des filtres de synthèse. Ensuite, à l'aide de diverses transformations du domaine fréquence au domaine temps, les réponses impulsionnelles des filtres de synthèse de type RIF sont trouvées. Donc, en utilisant des filtres RIF de longueur raisonnable, une erreur apparaît entre la fonction de transfert idéale des filtres de synthèse (qui résulte de la résolution des

**Tab. 3.8** – *Performances du BFH synthétisé par la méthode ALMC avec les paramètres du tableau 3.7*

	$\eta_X = 1$	$\eta_X = 0.9$
Repliement total moyen (dB)	-18	-28
Repliement total maximal (dB)	0.51	-19
Distorsion d'amplitude moyenne (dB)	$-1.7 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$
Distorsion d'amplitude maximale (dB)	0.17	$8.8 \cdot 10^{-2}$
Distorsion de phase moyenne (radian)	$2.8 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-3}$
Distorsion de phase maximale (radian)	$8.6 \cdot 10^{-2}$	$9.7 \cdot 10^{-3}$

équations de reconstruction parfaite) et la fonction de transfert réalisée. Dans ce paragraphe, une méthode qui trouve directement les réponses impulsionnelles (sans passer par l'intermédiaire des réponses fréquentielles idéales des filtres) est présentée. On élimine ainsi une des sources des erreurs qui peuvent apparaître lors de la synthèse, comme les erreurs introduites par la transformée du domaine fréquence au domaine temps.

De nouveau, les filtres d'analyse sont considérés connus. Les transformées de Fourier des filtres de synthèse recherchés sont :

$$F_m(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n^{(m)} e^{-j\omega n}, \quad m \in \{1, 2, \dots, M\}. \quad (3.23)$$

Il s'agit donc de filtres à réponse impulsionnelle finie de longueur  $N$ . On cherche les coefficients  $\{f_n^{(m)}\}$  pour  $m \in \{1, 2, \dots, M\}$  et  $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ . On utilise toujours le même ensemble de pulsations  $\mathcal{P}$  discrétisant l'intervalle  $[-\pi, \pi[$ , (3.22). On écrit les conditions de reconstruction parfaite pour toutes les pulsations de  $\mathcal{P}$  :

$$T_p(e^{j\omega_k}) = \begin{cases} ce^{-j\omega_k d}, & p = 0 \\ 0 & , p \in \{-(M-1), \dots, -1, 1, \dots, M-1\} \end{cases} \quad (3.24)$$

$k \in \{1, 2, \dots, K\}$ , où :

$$T_p(e^{j\omega_k}) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M F_m(e^{j\omega_k}) H_m(j\Omega_k - j\frac{2\pi p}{MT}). \quad (3.25)$$

Comme on a pu le voir précédemment (voir paragraphe 2.3.1), pour un signal d'entrée à spectre borné, l'expression (3.24) constitue un système de  $2M-1$  équations

complexes avec  $MN$  inconnues ( $f_m^{(n)}$  pour  $m \in \{1, \dots, M\}$  et  $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ ). En écrivant les expressions (3.24) pour toutes les pulsations  $\omega_k \in \mathcal{P}$ , on obtient un système de  $(2M-1)K$  équations complexes avec  $MN$  inconnues. Pour écrire ce système sous forme matricielle, on utilise les vecteurs suivants :

$$\mathbf{e}_k = \begin{bmatrix} 1 & e^{-j\omega_k} & \dots & e^{-j(N-1)\omega_k} \end{bmatrix}^T \quad (3.26)$$

$$\mathbf{E}_k = \text{diag}(\mathbf{e}_k), \quad k \in \{1, 2, \dots, K\} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{E}_K \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

où  $\mathbf{A}^T$  représente la transposition de la matrice  $\mathbf{A}$ . Le vecteur des coefficients des filtres de synthèse est :

$$\mathbf{f} = \left[ f_0^{(1)} f_1^{(1)} \dots f_{N-1}^{(1)} \dots f_0^{(M)} f_1^{(M)} \dots f_{N-1}^{(M)} \right]^T. \quad (3.29)$$

La matrice des « décalés » du filtre  $H_m$  est :

$$\mathbf{H}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_m^{(0)} \\ \mathbf{H}_m^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_m^{(M-1)} \\ \mathbf{H}_m^{(-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_m^{-(M-1)} \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

où  $\mathbf{H}_m^{(p)}$  est donnée par :

$$\mathbf{H}_m^{(p)} = \begin{bmatrix} \underbrace{H_m^{(p)}(j\Omega_1) \dots H_m^{(p)}(j\Omega_1)}_N & \underbrace{0 \dots 0}_N & \underbrace{0 \dots 0 \dots}_N & \underbrace{0 \dots 0}_N \\ \underbrace{0 \dots 0}_N & \underbrace{H_m^{(p)}(j\Omega_2) \dots H_m^{(p)}(j\Omega_2)}_N & \underbrace{0 \dots 0 \dots}_N & \underbrace{0 \dots 0}_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{0 \dots 0}_N & \underbrace{0 \dots 0}_N & \underbrace{0 \dots 0 \dots}_N & \underbrace{H_m^{(p)}(j\Omega_K) \dots H_m^{(p)}(j\Omega_K)}_N \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

et  $H_m^{(p)}(j\Omega)$  est :

$$H_m^{(p)}(j\Omega) = H_m(j\Omega - j\frac{2\pi p}{MT}). \quad (3.32)$$

Avec les notations suivantes :

$$\mathbf{H}_{em} = \mathbf{H}_m \mathbf{E} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{H}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{e1} & \mathbf{H}_{e2} & \cdots & \mathbf{H}_{eM} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{t}_c = cM \begin{bmatrix} e^{-j\omega_1 d} & e^{-j\omega_2 d} & \cdots & e^{-j\omega_K d} & \mathbf{0}_{(2M-2)K} \end{bmatrix}^T \quad (3.35)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \text{Re}\{\mathbf{H}_c\} \\ \text{Im}\{\mathbf{H}_c\} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

et

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \text{Re}\{\mathbf{t}_c\} \\ \text{Im}\{\mathbf{t}_c\} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

la forme matricielle des équations de reconstruction parfaite pour l'ensemble de pulsations  $\mathcal{P}$  s'écrit donc :

$$\mathbf{H}\mathbf{f} = \mathbf{t}. \quad (3.38)$$

En (3.35),  $\mathbf{0}_{(2M-2)K}$  est un vecteur ligne contenant  $(2M-2)K$  zéros.  $\text{Re}\{\mathbf{A}\}$  et  $\text{Im}\{\mathbf{A}\}$  représentent les parties réelle et imaginaire de la matrice  $\mathbf{A}$ .

$K$  est en général choisi de telle manière que  $2(2M-1)K > MN$ . Le système (3.38) est donc sur-déterminé et incompatible. Pourtant, une solution au sens des moindres carrés peut être trouvée [79] :

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{H}^+ \mathbf{t} \quad (3.39)$$

où  $\mathbf{H}^+$  est la pseudoinverse de la matrice  $\mathbf{H}$ . Cette solution minimise la somme des carrés des éléments du vecteur d'erreur (la norme du vecteur d'erreur) :

$$\Delta = \|\mathbf{H}\mathbf{f} - \mathbf{t}\|^2. \quad (3.40)$$

Le vecteur  $\mathbf{H}\bar{\mathbf{f}}$  est donc la projection orthogonale de  $\mathbf{t}$  sur l'espace colonne de la matrice  $\mathbf{H}$ , et si les colonnes sont linéairement indépendantes, cette projection orthogonale est uniquement exprimée en fonction des colonnes. Donc, si les colonnes de la matrice  $\mathbf{H}$  sont linéairement indépendantes, la solution qui minimise l'erreur  $\Delta$  existe et elle est unique. La pseudoinverse peut être calculée avec la formule :

$$\mathbf{H}^+ = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \quad (3.41)$$

parce que les colonnes de  $\mathbf{H}$  sont linéairement indépendantes.

Même si les colonnes de  $\mathbf{H}$  ne sont pas linéairement indépendantes, il existe toujours une solution qui minimise l'erreur  $\Delta$ . Si  $\bar{\mathbf{f}}$  est une solution minimisant  $\|\mathbf{H}\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{t}\|^2$ ,  $\mathbf{H}\bar{\mathbf{f}}$  est toujours la projection orthogonale de  $\mathbf{t}$  sur l'espace colonne de la matrice  $\mathbf{H}$ . Mais comme les colonnes ne sont pas linéairement indépendantes la projection orthogonale ne s'exprime plus de manière unique en fonction des colonnes de  $\mathbf{H}$ , donc il y a plusieurs solutions minimisant  $\Delta$ . En général, on choisit comme solution celle qui a la norme minimale. Ce choix a aussi un sens particulièrement important dans le contexte de notre problème : le bruit de quantification sur chaque branche sera proportionnel à la somme des carrés des coefficients des filtres numériques de synthèse. Donc, parmi les solutions minimisant  $\Delta$  on a intérêt à choisir celle ayant la longueur minimale. Dans ce cas, la pseudoinverse est :

$$\mathbf{H}^+ = \mathbf{Q}_2 \Sigma^+ \mathbf{Q}_1^T \quad (3.42)$$

où  $\mathbf{Q}_2$ ,  $\mathbf{Q}_1$  et  $\Sigma$  donnent la décomposition en valeurs singulières de  $\mathbf{H}$  :

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q}_1 \Sigma \mathbf{Q}_2^T. \quad (3.43)$$

Si  $\mathbf{H}$  est une matrice  $(2(2M-1)K, MN)$ ,  $\mathbf{Q}_1$ ,  $\mathbf{Q}_2$  sont des matrices orthogonales de dimensions  $(2(2M-1)K, 2(2M-1)K)$  et respectivement  $(MN, MN)$ .  $\Sigma$  est une matrice contenant les valeurs singulières de  $\mathbf{H}$  sur les premières positions de la diagonale principale et des zéros partout ailleurs. La matrice  $\Sigma^+$  peut facilement être trouvée, elle contient les inverses des valeurs singulières de  $\mathbf{H}$  sur la diagonale principale et des zéros partout ailleurs.

### Sur-échantillonnage

On utilise ici la technique de sur-échantillonnage dans le processus de synthèse décrite au paragraphe 3.2.2. Tenant compte de (3.14) et (3.15) on écrit les conditions de reconstruction parfaite :

$$T_p^W(e^{j\omega_k}) = \begin{cases} ce^{-j\omega_k d} W(j\Omega_k), & p = 0 \\ 0 & , p \in \{-(M-1), \dots, -1, 1, \dots, M-1\} \end{cases} \quad (3.44)$$

où

$$T_p^W(e^{j\omega_k}) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M F_m(e^{j\omega_k}) H_m(j\Omega_k - j\frac{2\pi p}{MT}) W(j\Omega_k - j\frac{2\pi p}{MT}). \quad (3.45)$$

$W(j\Omega)$  est la fonction de pondération donnée en (3.13). Si (3.32) et (3.35) sont réécrites comme ci-dessus :

$$H_m^{(p)}(j\Omega) = H_m(j\Omega - j\frac{2\pi p}{MT})W(j\Omega - j\frac{2\pi p}{MT}) \quad (3.46)$$

$$\mathbf{t}_c = cM \begin{bmatrix} e^{-j\omega_1 d} W(j\Omega_1) & e^{-j\omega_2 d} W(j\Omega_2) & \dots & e^{-j\omega_K d} W(j\Omega_K) & \mathbf{0}_{(2M-2)K} \end{bmatrix}^T \quad (3.47)$$

toutes les matrices et la méthode de synthèse données dans le paragraphe précédent restent les mêmes. On effectue ainsi une minimisation du critère quadratique du paragraphe précédent pondéré par la fonction  $W(j\Omega)$ . Les résultats sont nettement améliorés, comme on pourra le constater dans le paragraphe suivant.

### Simulation et résultats

De nouveau, un banc de filtres à  $M = 8$  voies a été étudié. Les paramètres de cette première synthèse sont donnés dans le tableau 3.9.

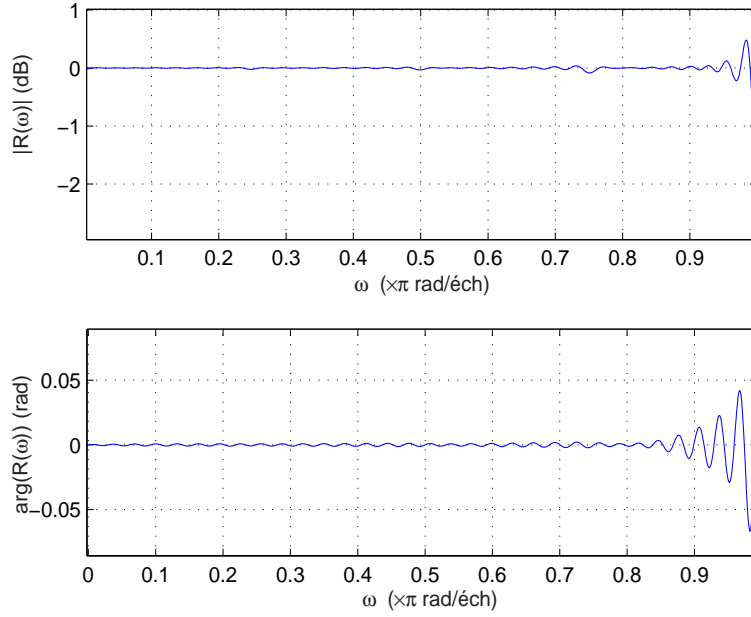
**Tab. 3.9** – Paramètres pour une synthèse par AGMC - « Banc1 »

Nb. de voies	$M = 8$
Filtres d'analyse	« Banc1 » (voir annexe D)
Filtres de synthèse	RIF, longueur 128
Nb. de points de fréquence	$K = 256$
Sur-échantillonnage	Cas I: $\eta_S = 1$ , Cas II: $\eta_S = 0.93$
Retard	$d = 64$

Pour les valeurs choisies, on a bien  $2(2M - 1)K > MN$ . Par conséquent, (3.38) est un système sur-déterminé et incompatible. Mais on a trouvé la solution dans le sens des moindres carrés donnée par (3.39).

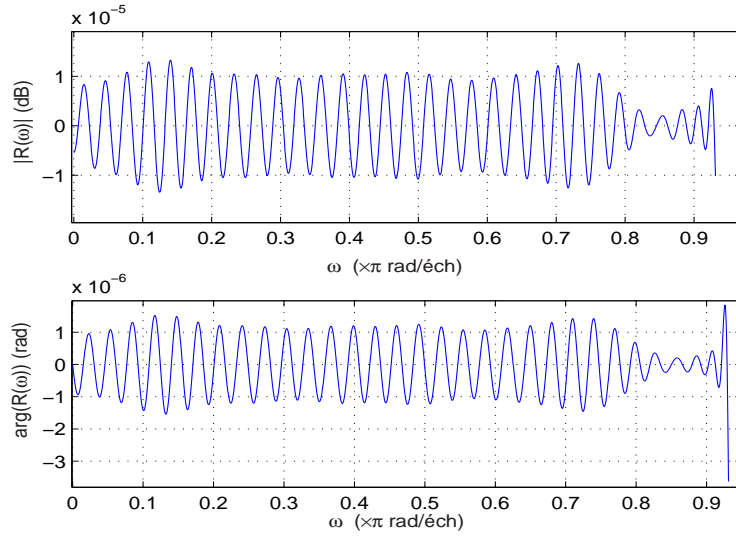
Dans le Cas I, une synthèse sans sur-échantillonnage a été effectuée. La figure 3.16 représente la distorsion du BFH obtenu. Les performances de ce BFH sont montrées dans le tableau 3.10.

Dans le Cas II, une synthèse été effectuée utilisant un sur-échantillonnage -  $\eta_S = 0.93$  (voir équation (3.13)). Dans la figure 3.17 on a représenté la distorsion. On peut remarquer un très bon comportement en ce qui concerne la distorsion d'amplitude et de phase de ce système. Les résultats de la synthèse se trouvent dans le tableau 3.10. Dans les figures 3.18 et 3.19 sont représentés, comparativement, les modules des



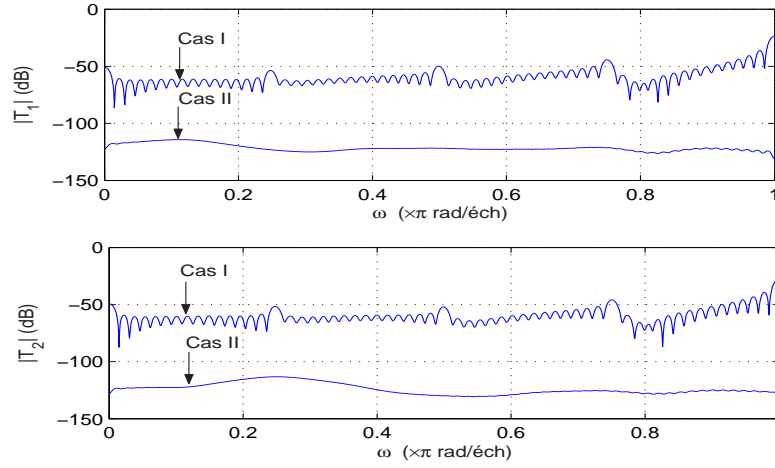
**Fig. 3.16** — *Distorsion - méthode AGMC et paramètres du tableau 3.9, Cas I:  $\eta_S = 1$*

quatre fonctions de repliement pour les cas d'une synthèse sans sur-échantillonnage et pour le cas d'une synthèse avec sur-échantillonnage ( $\eta_S = 0.93$ ). Le repliement total est représenté dans la figure 3.20. On peut observer une amélioration évidente par rapport au cas sans sur-échantillonnage.

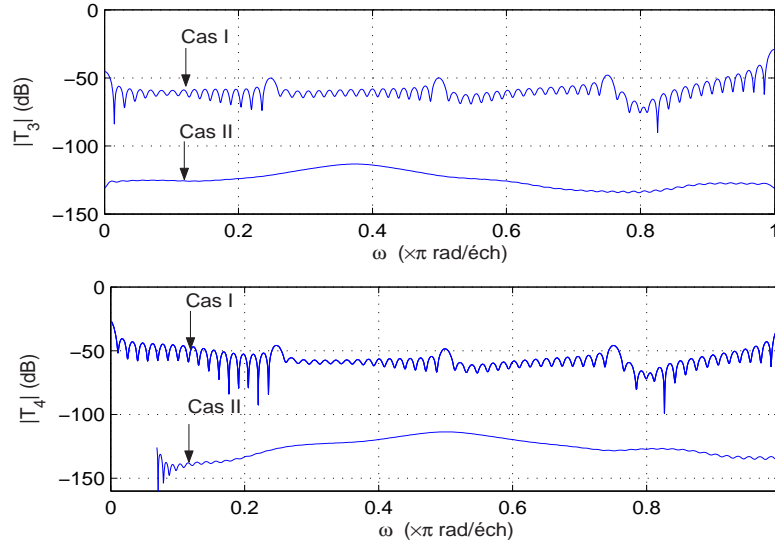


**Fig. 3.17** — *Distorsion - méthode AGMC et paramètres du tableau 3.9, Cas II:  $\eta_S = 0.93$ .*





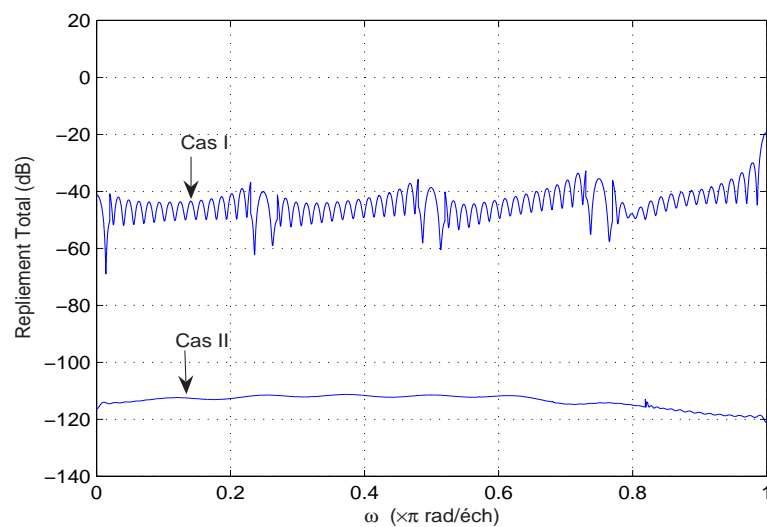
**Fig. 3.18** – Module des fonctions de repliement  $T_1(e^{j\omega})$  et  $T_2(e^{j\omega})$  - méthode AGMC et paramètres du tableau 3.9.



**Fig. 3.19** – Module des fonctions de repliement  $T_3(e^{j\omega})$  et  $T_4(e^{j\omega})$  - méthode AGMC et paramètres du tableau 3.9.

Une autre synthèse a été effectuée utilisant un banc de filtres à huit branches utilisant des résonateurs à facteur de qualité constant, « Banc2 ». Les paramètres de cette synthèse sont donnés dans le tableau 3.11.

Les résultats sont présentés dans le tableau 3.12. De nouveau, les performances pour le « Banc1 » sont meilleures que les performances pour le « Banc2 » grâce à



**Fig. 3.20** – *Repliement total - méthode AGMC et paramètres du tableau 3.9.*

**Tab. 3.10** – *Performances du BFH synthétisé par la méthode AGMC avec les paramètres du tableau 3.9.*

	Synthèse sans sur-échantillonnage	Synthèse pour $\eta_S = 0.93$
Repliement total moyen (dB)	-39	-113
Repliement total maximal (dB)	-19	-111
Distorsion d'amplitude moyenne (dB)	0.002	$3.4 \cdot 10^{-8}$
Distorsion d'amplitude maximum (dB)	0.4	$1.3 \cdot 10^{-5}$
Distorsion de phase moyenne (radian)	0.006	$7 \cdot 10^{-7}$
Distorsion de phase maximum (radian)	0.63	$3.6 \cdot 10^{-6}$

**Tab. 3.11** – *Paramètres pour une synthèse par AGMC - « Banc2 »*

Nb. de voies	$M = 8$
Filtres d'analyse	« Banc2 » (voir annexe D)
Filtres de synthèse	RIF, longueur 128
Nb. de points de fréquence	$K = 256$
Sur-échantillonnage	$\eta_S = 0.93$
Retard	$d = 64$

une répartition linéaire des filtres d'analyse.

**Tab. 3.12** – *Performances du BFH synthétisé par la méthode AGMC avec les paramètres du tableau 3.11*

	Synthèse pour $\eta_S = 0.93$
Repliement total moyen (dB)	-115
Repliement total maximal (dB)	-108
Distorsion d'amplitude moyenne (dB)	$2.9 \cdot 10^{-8}$
Distorsion d'amplitude maximum (dB)	$2.9 \cdot 10^{-5}$
Distorsion de phase moyenne (radian)	$4.5 \cdot 10^{-7}$
Distorsion de phase maximum (radian)	$3.3 \cdot 10^{-6}$

Il est évident que la résolution maximale d'un CAN à BFH est liée au niveau de repliement total. Tenant compte de l'équation (A.2), une valeur réaliste du nombre maximal de bits de quantification est donc donnée par la valeur maximale du repliement total divisée par 6. On obtient donc pour le cas du BFH avec « Banc1 » et sur-échantillonnage une résolution de 18 bit et une résolution de 6 bit pour le cas sans sur-échantillonnage. Il est bien sûr possible de trouver un autre compromis qui serait en adéquation avec une résolution comprise entre 6 et 18 bit.

### 3.4 Méthode d'approximation continue (AC)

Les méthodes précédentes reposent sur un échantillonnage de la réponse fréquentielle. Un grand nombre de pulsations doit donc être considéré afin que le critère soit le plus précis possible. On peut aussi envisager un critère continu prenant donc en compte toutes les fréquences utiles et pas seulement un échantillonnage de celles-ci. Nous proposons une expression analytique des coefficients des filtres de synthèse qui repose sur un critère de type intégrale.

#### Principe

Approcher au mieux la reconstruction parfaite d'un BFH à une pulsation  $\omega$  donnée au sens des moindres carrés, revient à minimiser le critère suivant :

$$J(\omega) = \|\mathbf{A}(\omega)\mathbf{f} - \mathbf{t}(\omega)\|^2 \quad (3.48)$$

où  $\mathbf{f}$  est le vecteur composé des coefficients des filtres de synthèse défini dans l'expression (3.29).  $\mathbf{A}(\omega)$  est une matrice composée des valeurs des réponses fréquentielles des filtres d'analyse et de leurs décalés en  $\omega$ . Elle est fonction aussi de l'ordre des filtres de synthèse RIF recherchés.

$$\mathbf{A}(\omega) = \begin{bmatrix} H_1(j\omega/T)\mathbf{e}(\omega) & H_2(j\omega/T)\mathbf{e}(\omega) & \cdots & H_M(j\omega/T)\mathbf{e}(\omega) \\ H_1(j(\omega - \frac{2\pi}{M})/T)\mathbf{e}(\omega) & H_2(j(\omega - \frac{2\pi}{M})/T)\mathbf{e}(\omega) & \cdots & H_M(j(\omega - \frac{2\pi}{M})/T)\mathbf{e}(\omega) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_1(j(\omega - \frac{2\pi(M-1)}{M})/T)\mathbf{e}(\omega) & H_2(j(\omega - \frac{2\pi(M-1)}{M})/T)\mathbf{e}(\omega) & \cdots & H_M(j(\omega - \frac{2\pi(M-1)}{M})/T)\mathbf{e}(\omega) \\ H_1(j(\omega + \frac{2\pi}{M})/T)\mathbf{e}(\omega) & H_2(j(\omega + \frac{2\pi}{M})/T)\mathbf{e}(\omega) & \cdots & H_M(j(\omega + \frac{2\pi}{M})/T)\mathbf{e}(\omega) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_1(j(\omega + \frac{2\pi(M-1)}{M})/T)\mathbf{e}(\omega) & H_2(j(\omega + \frac{2\pi(M-1)}{M})/T)\mathbf{e}(\omega) & \cdots & H_M(j(\omega + \frac{2\pi(M-1)}{M})/T)\mathbf{e}(\omega) \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

$$\mathbf{e}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-j\omega} & \cdots & e^{-j(N-1)\omega} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

et :

$$\mathbf{t}(\omega) = cM \begin{bmatrix} e^{-j\omega\rho} & \mathbf{0}_{(2M-2)} \end{bmatrix}^T \quad (3.51)$$

Après développement de cette expression, on obtient :

$$\begin{aligned} J(\omega) &= (\mathbf{A}(\omega)\mathbf{f} - \mathbf{t}(\omega))^\dagger (\mathbf{A}(\omega)\mathbf{f} - \mathbf{t}(\omega)) \\ &= \mathbf{f}^\dagger \mathbf{A}(\omega)^\dagger \mathbf{A}(\omega) \mathbf{f} - \mathbf{f}^\dagger \mathbf{A}(\omega)^\dagger \mathbf{t}(\omega) - \mathbf{t}(\omega)^\dagger \mathbf{A}(\omega) \mathbf{f} + \mathbf{t}(\omega)^\dagger \mathbf{t}(\omega) \end{aligned} \quad (3.52)$$

où  $^\dagger$  est l'opérateur qui transpose et conjugue. En intégrant cette expression sur l'intervalle  $[0, \pi]$ , on obtient le critère :

$$J = \mathbf{f}^\dagger \Sigma \mathbf{f} - \mathbf{f}^\dagger \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^\dagger \mathbf{f} + r \quad (3.53)$$

où :

$$\Sigma = \int_0^\pi \mathbf{A}(\omega)^\dagger \mathbf{A}(\omega) d\omega \quad (3.54)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \int_0^\pi \mathbf{A}(\omega)^\dagger \mathbf{t}(\omega) d\omega \quad (3.55)$$

$$r = \int_0^\pi \mathbf{t}(\omega)^\dagger \mathbf{t}(\omega) d\omega \quad (3.56)$$

$\Sigma$  est une matrice  $(MN, MN)$ .  $\alpha$  est un vecteur colonne de longueur  $MN$ .  $r$  est un scalaire. Du fait du caractère hermitien de  $\Sigma$ , on a  $\Sigma_{ij} = \Sigma_{ji}^*$  (où  $*$  est l'opérateur qui conjugue). De plus les coefficients des filtres numériques recherchés sont réels, d'où :

$$\mathbf{f}^\dagger \Sigma \mathbf{f} = \mathbf{f}^T \text{Re}(\Sigma) \mathbf{f} \quad (3.57)$$

Comme on a de plus  $\mathbf{f}^T \alpha = \alpha^T \mathbf{f}$  (car c'est le produit scalaire de deux vecteurs, l'un en ligne, l'autre en colonne), le critère devient finalement :

$$J = \mathbf{f}^T \text{Re}(\Sigma) \mathbf{f} - \mathbf{f}^T \alpha - \mathbf{f}^T \alpha^* + r \quad (3.58)$$

Le critère est minimal quand sa dérivée par rapport à  $\mathbf{f}$  est nulle, soit quand :

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{f}} = 2\text{Re}(\Sigma) \mathbf{f} - \alpha - \alpha^* = 0 \quad (3.59)$$

Il suffit donc de résoudre le système suivant aux moindres carrés :

$$\text{Re}(\Sigma) \mathbf{f} = \text{Re}(\alpha) \quad (3.60)$$

Le résultat final dépend de la précision avec laquelle sont calculés les termes intégrales qui composent les matrices  $\Sigma$  et  $\alpha$ . Si on approche les intégrales par la méthode des rectangles sur les points de  $\mathcal{P}$  (défini dans les méthodes d'échantillonnage de la réponse fréquentielle), alors on retrouve la méthode d'approximation globale aux moindres carrés décrite dans le paragraphe 3.3.3. Ici, nous avons choisi la méthode adaptative de Simpson.

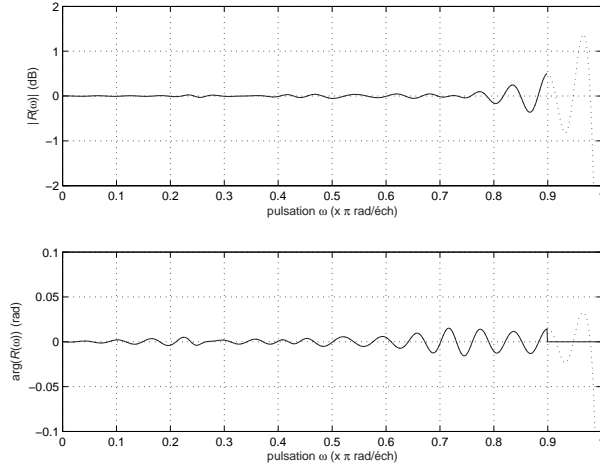
### Simulation et résultats

On synthétise un banc de synthèse pour les paramètres donnés dans le tableau 3.13. Pour ce BFH, deux résultats sont fournis. Le premier résultat montre les performances

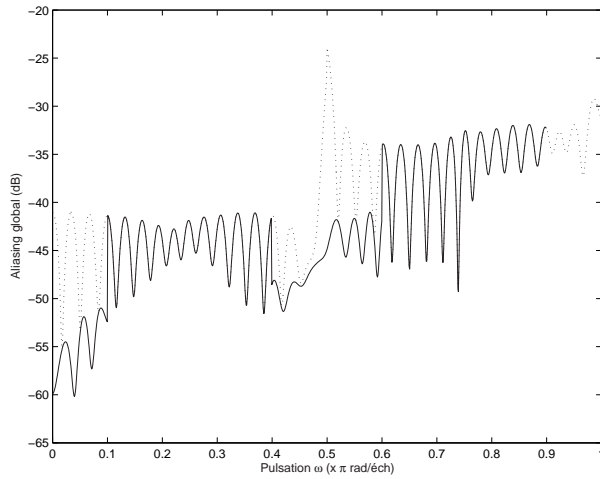
**Tab. 3.13** – Paramètres pour une synthèse par AC - « Banc3 »

Nb. de voies	$M = 4$
Filtres d'analyse	« Banc3 » (voir annexe D)
Filtres de synthèse	RIF, longueur 64
Retard	$d = 32$

avec un signal d'entrée couvrant toute la bande ( $\eta_X = 1$ ). Le deuxième résultat donne les performances avec un signal d'entrée couvrant une bande plus restreinte



**Fig. 3.21** — *Distorsion - méthode AC et paramètres du tableau 3.13. En trait pointillé :  $\eta_X = 1$ . En trait plein :  $\eta_X = 0.9$*



**Fig. 3.22** — *Repliement total - méthode AC et paramètres du tableau 3.13. En trait pointillé :  $\eta_X = 1$ . En trait plein :  $\eta_X = 0.9$*

( $\eta_X = 0.9$ ). La figure 3.21 montre la distorsion. La figure 3.22 montre le repliement total. Les résultats sont résumés dans le tableau 3.14.

Ces résultats sont à comparer à ceux de la méthode d'approximation globale aux moindres carrés. Pour le même banc d'analyse et la même longueur de filtres de synthèse, un BFH a été synthétisé par cette dernière avec les paramètres donnés dans le tableau 3.15.

On constate que les performances (tableau 3.16) sont similaires à celles du BFH

**Tab. 3.14** – Performances du BFH synthétisé par la méthode AC avec les paramètres du tableau 3.13

	$\eta_X = 1$	$\eta_X = 0.9$
Repliement total moyen (dB)	-36.3	-39.3
Repliement total maximal (dB)	-23.9	-31.9
Distorsion d'amplitude moyenne (dB)	$-5.1 \cdot 10^{-2}$	$7.7 \cdot 10^{-4}$
Distorsion d'amplitude maximum (dB)	5.0	0.49
Distorsion de phase moyenne (radian)	$1.0 \cdot 10^{-2}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$
Distorsion de phase maximum (radian)	1.1	$1.6 \cdot 10^{-2}$

**Tab. 3.15** – Paramètres pour une synthèse par AGMC - « Banc3 »

Nb. de voies	$M = 4$
Filtres d'analyse	« Banc3 » (voir annexe D)
Filtres de synthèse	RIF, longueur 64
Nb. de points de fréquence	$K = 512$
Retard	$d = 32$

obtenu par approximation continue. En effet, théoriquement la méthode d'approximation globale est similaire à la méthode d'approximation continue dans laquelle on aurait calculé l'intégrale par la méthode des rectangles. Les résultats montrent que le nombre de pulsations considérées est suffisant pour obtenir la même précision que dans le cas continu.

La méthode par approximation continue peut prendre en compte un léger sur-échantillonnage du signal d'entrée. Cette fonctionnalité n'a pas été implémentée mais

**Tab. 3.16** – Performances du BFH synthétisé par la méthode AGMC avec les paramètres du tableau 3.15

	$\eta_X = 1$	$\eta_X = 0.9$
Repliement total moyen (dB)	-36.6	-39.6
Repliement total maximal (dB) (maximum)	-24.8	-31.9
Distorsion d'amplitude moyenne (dB)	$-5.2 \cdot 10^{-2}$	$7.8 \cdot 10^{-4}$
Distorsion d'amplitude maximum (dB)	13.3	0.49
Distorsion de phase moyenne (radian)	$1.0 \cdot 10^{-2}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$
Distorsion de phase maximum (radian)	1.1	$1.6 \cdot 10^{-2}$

on peut en donner le principe. Il est identique à celui donné pour la méthode d'approximation globale. Il s'agit de multiplier les réponses fréquentielles des filtres d'analyse ainsi que la réponse fréquentielle idéale du BFH (retard de  $d$  échantillons) par la fonction de pondération définie par l'expression (3.13).

## 3.5 Méthodes d'amélioration

Une fois qu'une solution ( $M$  filtres d'analyse et  $M$  filtres de synthèse) est trouvée, on peut chercher à améliorer les performances du BFH en minimisant divers critères d'erreur. Deux types d'optimisation peuvent être effectuées : une optimisation des filtres de synthèse ou une optimisation des filtres d'analyse.

### 3.5.1 Méthodes d'amélioration des filtres de synthèse

On suppose de nouveau que les filtres d'analyse sont donnés et qu'on a trouvé par une méthode quelconque les filtres de synthèse (voir par exemple les paragraphes 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3). On considère alors le critère suivant :

$$\phi = \int_{-\pi}^{\pi} |T_0(e^{j\omega}) - ce^{-j\omega d}|^2 d\omega + \sum_{\substack{p=-(M-1) \\ p \neq 0}}^{M-1} c_p \int_{-\pi}^{\pi} |T_p(e^{j\omega})|^2 d\omega. \quad (3.61)$$

En effet, il permet, grâce aux facteurs  $c_p$ , de pondérer l'erreur de distorsion par rapport à l'erreur de repliement. En fonction du type et du niveau d'erreur qu'on peut accepter, les  $c_p$  varient.

Pour calculer les intégrales dans la relation (3.61), on utilise la même discrétisation de l'intervalle  $[-\pi, \pi[$  qu'on a utilisée précédemment :

$$\mathcal{P} = \{\omega_1, \dots, \omega_K\} \quad (3.62)$$

et on écrit :

$$\phi_d = \sum_{k=1}^K |T_0(e^{j\omega_k}) - ce^{-j\omega_k d}|^2 + \sum_{\substack{p=-(M-1) \\ p \neq 0}}^{M-1} c_p \sum_{k=1}^K |T_p(e^{j\omega_k})|^2. \quad (3.63)$$

Le critère ci-dessus peut être minimisé par diverses techniques d'optimisation.



### Sur-échantillonnage - optimisation pondérée

En utilisant la fonction de pondération définie en (3.13) on écrit alors le critère en (3.61) comme suit :

$$\phi = \int_{-\pi}^{\pi} |(T_0(e^{j\omega}) - ce^{-j\omega d}) W(j\Omega)|^2 d\omega + \sum_{\substack{p=-(M-1) \\ p \neq 0}}^{M-1} c_p \int_{-\pi}^{\pi} \left| T_p(e^{j\omega}) W(j\Omega - j\frac{2\pi p}{MT}) \right|^2 d\omega \quad (3.64)$$

ou, en équivalent discret :

$$\phi_d = \sum_{k=1}^K |(T_0(e^{j\omega_k}) - ce^{-j\omega_k d}) W(j\Omega_k)|^2 + \sum_{\substack{p=-(M-1) \\ p \neq 0}}^{M-1} c_p \sum_{k=1}^K \left| T_p(e^{j\omega_k}) W(j\Omega_k - j\frac{2\pi p}{MT}) \right|^2. \quad (3.65)$$

### Cas de filtres de synthèse à réponse impulsionnelle finie (RIF)

On peut remarquer que, si le banc de synthèse est constitué de filtres à réponse impulsionnelle finie, le critère (3.63) pour  $c_p = 1$ ,  $p \in \{-(M-1), \dots, (M-1)\} \setminus \{0\}$  et la norme du vecteur d'erreur (3.40) défini dans la méthode AGMC (paragraphe 3.3.3) ont les mêmes expressions, à un facteur près. Pour  $c_p \neq 1$  l'expression (3.65) peut être la même (à un facteur près) que la version « pondérée » de (3.40) en remplaçant  $W(j\Omega)$  en (3.44), (3.45), (3.46) par :

$$W_p(j\Omega) = c_p W(j\Omega). \quad (3.66)$$

Donc les coefficients des filtres qui minimisent le critère en (3.63) sont donnés par l'équation (3.39). Par conséquent, dans le cas des filtres RIF, les deux méthodes de synthèse aboutissent au même résultat. En revanche, la méthode de ce paragraphe peut aussi être utilisée dans le cas des filtres à réponse impulsionnelle infinie.

### Cas de filtres de synthèse à réponse impulsionnelle infinie (RII)

Comme on a pu le constater dans le paragraphe 2.2.3, l'intérêt de la solution BFH réside dans l'atténuation de l'influence de l'appariement des CAN. Plus l'atténuation des filtres d'analyse et de synthèse est grande, plus l'atténuation des erreurs d'appariement est grande. Les résonateurs sont plus facilement réalisables mais leur atténuation dans la bande coupée n'est pas très grande. Dans le cas où on aurait besoin de valeurs

d'atténuation plus importantes pour atténuer les erreurs d'appariement, des filtres analogiques d'ordre plus élevé ou des résonateurs avec des facteurs de qualité plus élevés peuvent être utilisés. En principe, plus l'ordre des filtres augmente, plus la complexité de réalisation augmente. On doit donc, en pratique, trouver le meilleur compromis entre l'atténuation des erreurs d'appariement et la facilité de réalisation. En utilisant des filtres d'analyse d'ordre plus élevé ou des résonateurs avec des facteurs de qualité plus grands, les filtres de synthèse auront aussi des atténuations plus grandes dans les bandes coupées et des bandes de transitions plus étroites. Ce type de caractéristique est en principe plus facilement réalisable, pour un ordre donné, avec des filtres RII qu'avec des filtres RIF.

#### Adaptation de la méthode au cas de filtres de synthèse RII

Les filtres à réponse impulsionnelle infinie peuvent présenter des problèmes de stabilité. Pour s'assurer qu'ils restent stables, on peut modifier légèrement l'optimisation en y ajoutant une contrainte. L'idée évidente est d'utiliser des formes en treillis. L'optimisation du critère (3.63) est alors effectuée en imposant comme contrainte que les coefficients de réflexion soient inférieurs à 1. Tous les filtres obtenus seront donc stables.

### Simulation et résultats

Un BFH à huit voies a été synthétisé. Les filtres d'analyse sont des résonateurs ayant le même facteur de qualité (réaliste),  $Q = 15$ .

Pour déterminer les longueurs optimales des numérateurs et dénominateurs des filtres RII on peut utiliser le critère suivant:

$$\varepsilon_d = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K |\mathcal{F}_m(\omega_k) - F_m(e^{j\omega_k})|^2. \quad (3.67)$$

où  $\mathcal{F}_m(\omega_k)$  sont les valeurs des réponses fréquentielles des filtres de synthèse obtenues en résolvant les conditions de reconstruction parfaite et  $F_m(e^{j\omega_k})$  peuvent être par exemple obtenus par la méthode de l'approximation locale aux moindres carrés. Soit  $P$  la longueur des numérateurs et  $R$  la longueur des dénominateurs des fonctions de transfert des filtres de synthèse. La somme des longueurs des numérateurs et des dénominateurs des filtres RII est gardée constante et on calcule le critère (3.67) pour différentes valeurs de  $P$  et  $R$ . Le tableau 3.17 montre les valeurs de ce critère (divisé par le nombre de points de fréquence  $K$ ). Il s'avère que les meilleurs résultats sont

**Tab. 3.17** – Valeurs du critère (3.67) pour différentes longueurs des dénominateurs et numérateurs des filtres RII.  $L + R = 128$

Type du filtre	Valeur de $\varepsilon_d/K$
RIF, L=128, R=1	0.281
RII, L=122, R=6	0.202
RII, L=118, R=10	0.137
RII, L=114, R=14	0.104
RII, L=109, R=19	0.103
RII, L=108, R=20	0.098
RII, L=106, R=22	0.099
RII, L=100, R=28	0.101

obtenus pour  $R = 20$ . Nous cherchons donc les filtres de synthèse de longueur 20 pour le dénominateur et 108 pour le numérateur.

**Tab. 3.18** – Paramètres pour une synthèse par ALMC et amélioration des filtres de synthèse

Nb. de voies	$M = 8$
Filtres d'analyse	Résonateurs, $Q=15=\text{const.}$
Filtres de synthèse	RII, $L = 108, R = 20$
Nb. de points de fréquence	$K = 256$
Sur-échantillonnage	$\eta_S = 0.93$
Retard	$d = 80$
Facteurs de pondération	$c_p = 10$

Donc il s'agit en fait d'un filtre « tout pôle » suivi d'un filtre RIF. Pour la synthèse du banc de filtres on a utilisé la méthode locale aux moindres carrés (paragraphe 3.3.2) pour obtenir un point initial convenable de l'optimisation. Ensuite, on a appliqué la méthode d'amélioration des filtres de synthèse expliquée dans ce même paragraphe. Le tableau 3.19 résume les résultats de la synthèse. Les résultats obtenus dans le cas des filtres RII sont comparés avec les résultats obtenus dans le cas des filtres RIF de même complexité (des filtres RIF de longueur 128 ont été utilisés). Dans l'équation (3.65) on a pris  $c_p = 10$ , pour souligner la minimisation des erreurs de repliement; c'est la raison pour laquelle les erreurs de distorsion ne diminuent pas après l'optimisation. On voit clairement que, pour la même complexité des filtres de synthèse, de

**Tab. 3.19** – *Performances du BFH synthétisé par la méthode ALMC puis amélioré par la méthode d'amélioration des filtres de synthèse avec les paramètres du tableau 3.18*

	RIF avec optimisation	RII sans optimisation	RII avec optimisation
Repliement total moyen (dB)	-32	-24	-53
Repliement total maximal (dB)	-21	-16	-41
Distorsion d'amplitude moyenne (dB)	0.0038	0.17	0.007
Distorsion d'amplitude maximum (dB)	0.6	0.86	0.2
Distorsion de phase moyenne (radian)	0.0058	0.0032	0.0042
Distorsion de phase maximum (radian)	0.055	0.0332	0.0243

meilleures performances sont obtenues quand on utilise des filtres à réponse impulsionnelle infinie. L'optimisation a été effectuée utilisant un sur-échantillonnage et à l'aide d'une fonction  $W(j\Omega)$  comme celle définie en (3.13) avec  $\eta_S = 0.93$ . Dans cette optimisation, les paramètres des filtres d'analyse restent toujours constants. L'algorithme d'optimisation utilise la méthode de la région de confiance implémentée en Matlab par la fonction *lsqnonlin*.

### 3.5.2 Méthodes d'amélioration des filtres d'analyse

Dans le paragraphe précédent nous avons vu une méthode d'optimisation des filtres de synthèse. De la même manière, une optimisation des filtres d'analyse peut être effectuée. On prend en compte le même critère défini en (3.61). Dans [90], Velazquez optimise les pôles et les zéros des filtres d'analyse avec ce même critère. Dans la boucle d'optimisation, il calcule les filtres de synthèse avec une méthode d'approximation locale. Dans notre cas, nous faisons varier des paramètres des filtres d'analyse qui sont liés à l'implémentation comme leur fréquence de résonance et leur facteur de qualité. De plus, pour le calcul des filtres de synthèse, nous utilisons la méthode

AGMC qui fournit de meilleurs filtres de synthèse que les méthodes d'approximation locale.

Si on considère un sur-échantillonnage et une pondération faite à l'aide d'une fonction donnée en (3.13), on obtient le même critère discret que dans le paragraphe précédent :

$$\phi_d = \sum_{k=1}^K |(T_0(e^{j\omega_k}) - ce^{-j\omega_k d}) W(j\Omega_k)|^2 + \sum_{\substack{p=-(M-1) \\ p \neq 0}}^{M-1} c_p \sum_{k=1}^K \left| T_p(e^{j\omega_k}) W(j\Omega_k - j\frac{2\pi p}{MT}) \right|^2.$$

### Simulation et résultats

On synthétise un BFH avec la méthode AGMC à partir des paramètres du tableau 3.20.

**Tab. 3.20** – *Paramètres pour une synthèse par AGMC et optimisation des filtres d'analyse*

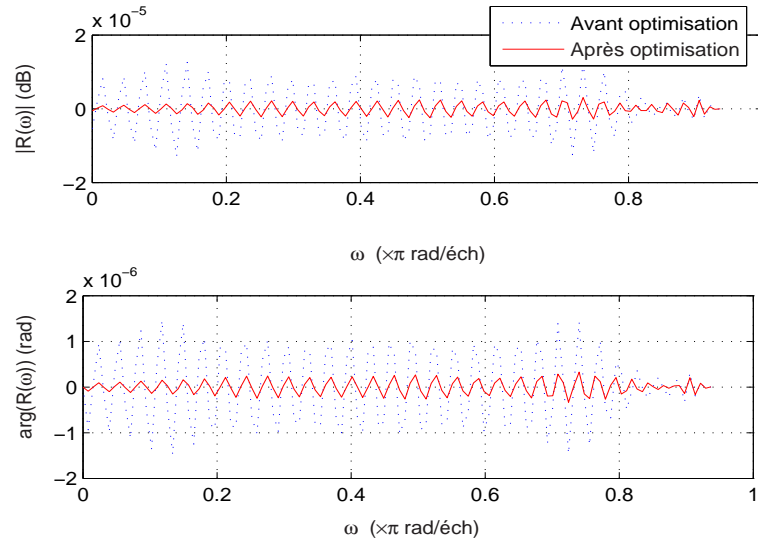
Nb. de voies	$M = 8$
Filtres d'analyse	« Banc1 » (voir annexe D)
Filtres de synthèse	RIF, longueur 128
Nb. de points de fréquence	$K = 256$
Sur-échantillonnage	$\eta_S = 0.93$
Retard	$d = 64$

On effectue une optimisation du critère (3.65). Mais cette fois, le critère dépend des paramètres des filtres d'analyse.

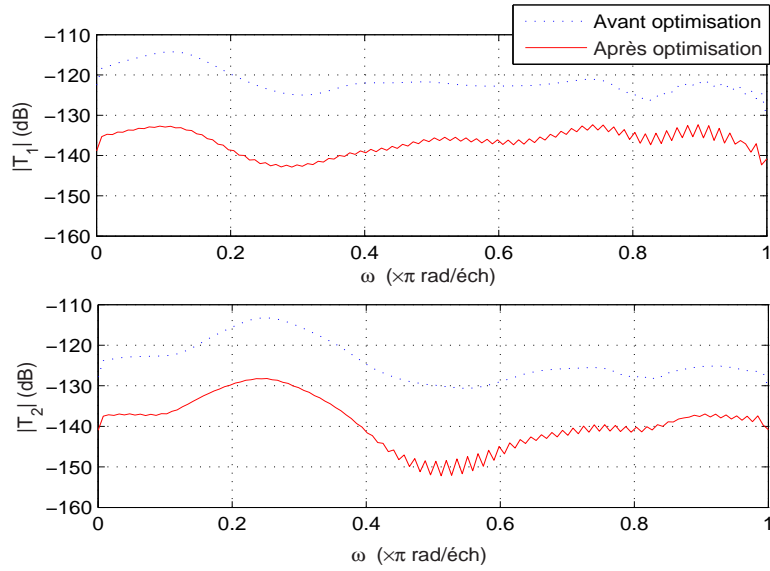
Il est important de remarquer le fait que les fonctions de repliement et la fonction de distorsion qui composent le critère (3.65) ne dépendent que des paramètres des filtres d'analyse, parce que les coefficients des filtres RIF sont calculés à partir de l'équation (3.39).

La figure 3.23, représente la distorsion sans (trait pointillé) et avec (trait continu) optimisation. On observe une amélioration évidente des performances en termes de distorsion du banc de filtres. Dans les figures 3.24 et 3.25 on représente à titre d'exemple les modules des quatre premières fonctions de repliement. Là aussi, on peut observer l'amélioration apportée par l'optimisation. La figure 3.26 représente le repliement total.

Dans la figure 3.27 on a représenté les modules des huit filtres d'analyse pour montrer comment ils ont été affectés par le processus d'optimisation. On observe



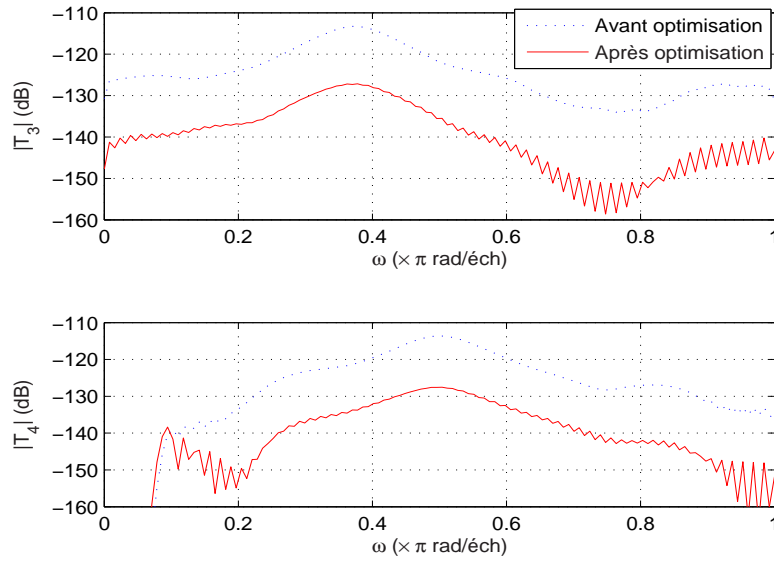
**Fig. 3.23** — *Distorsion - méthode AGMC et paramètres du tableau 3.20 - en trait pointillé : sans optimisation des filtres d'analyse - en trait plein : avec optimisation*



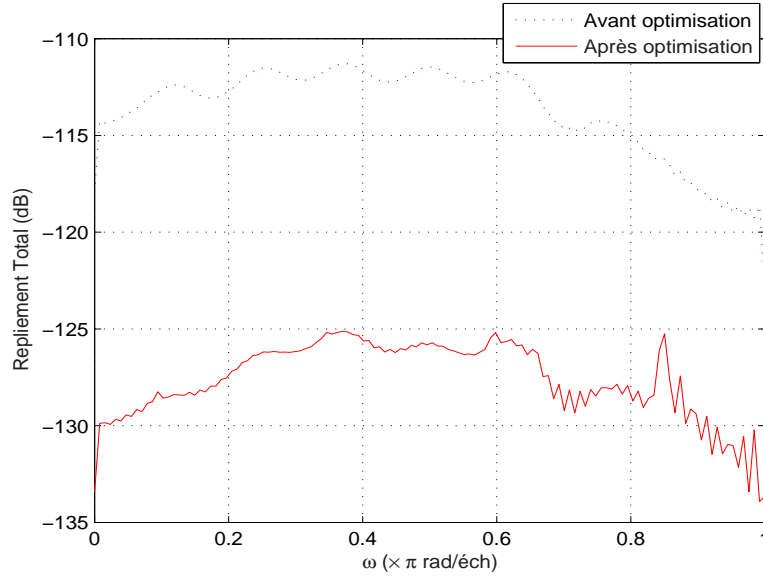
**Fig. 3.24** — *Module des fonctions de repliement  $T_1(e^{j\omega})$  et  $T_2(e^{j\omega})$  - en trait pointillé : sans optimisation des filtres d'analyse - en trait plein : avec optimisation*

qu'une légère modification de la position des fréquences centrales et des facteurs de qualité des filtres d'analyse a un impact très bénéfique sur les performances du BFH.

Le niveau moyen de repliement est amélioré de 14 dB grâce à l'optimisation, soit

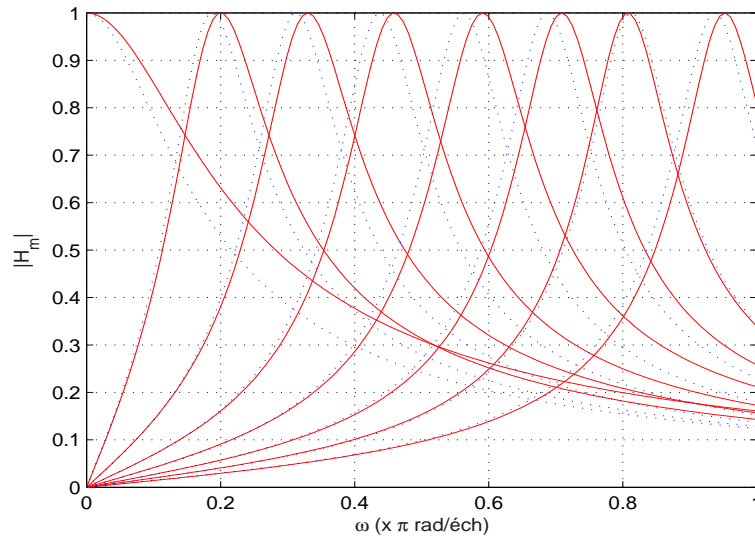


**Fig. 3.25** — *Module des fonctions de repliement  $T_3(e^{j\omega})$  et  $T_4(e^{j\omega})$  - en trait pointillé : sans optimisation des filtres d'analyse - en trait plein : avec optimisation*



**Fig. 3.26** — *Replieement total - en trait pointillé : sans optimisation des filtres d'analyse - en trait plein : avec optimisation*

un gain de plus de 2 bit de résolution. Le tableau 3.21 résume les performances avec et sans optimisation.



**Fig. 3.27** — *Module des filtres d'analyse - en trait pointillé: sans optimisation des filtres d'analyse - en trait plein: avec optimisation - paramètres du tableau 3.20*

**Tab. 3.21** — *Performances du BFH synthétisé par la méthode de l'approximation globale au moindres carrés puis amélioré par la méthode d'optimisation des filtres d'analyse avec les paramètres du tableau 3.20.*

	Sans optimisation	Avec optimisation de l'analogique
Repliement total moyen (dB)	-113	-127
Repliement total maximal (dB)	-111	-125
Distorsion d'amplitude moyenne (dB)	$3.4 \cdot 10^{-8}$	$2.3 \cdot 10^{-9}$
Distorsion d'amplitude maximum (dB)	$1.3 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-6}$
Distorsion de phase moyenne (radian)	$7 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-7}$
Distorsion de phase maximum (radian)	$3.6 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$

## 3.6 Éléments de comparaison

Ce paragraphe compare les méthodes de synthèse exposées dans ce chapitre. Le tableau 3.22 récapitule les performances pour les méthodes d'échantillonnage de la réponse fréquentielle.

Les trois méthodes TFI, ALMC, AGMC synthétisent des BFH de performances équivalentes pour un signal d'entrée occupant la totalité de la bande. Les perfor-



**Tab. 3.22** – *Comparaison des méthodes d'échantillonnage de la réponse fréquentielle*

	TFI	ALMC $\eta_X = 1$	ALMC $\eta_X = 0.9$	AGMC $\eta_S = 1$	AGMC $\eta_S = 0.93$
Repliement total moyen (dB)	-39	-35	-43	-39	-113
Repliement total maximal (dB)	-31	-19	-32	-19	-111
Distorsion d'amplitude moyenne (dB)	$3 \cdot 10^{-3}$	$-3.1 \cdot 10^{-3}$	$-6.0 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$3.4 \cdot 10^{-8}$
Distorsion d'amplitude maximum (dB)	0.9	1.6	0.13	0.4	$1.3 \cdot 10^{-5}$
Distorsion de phase moyenne (radian)	$4.0 \cdot 10^{-3}$	$5.4 \cdot 10^{-3}$	$7.5 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$7.1 \cdot 10^{-7}$
Distorsion de phase maximum (radian)	$6 \cdot 10^{-2}$	0.3	$1.4 \cdot 10^{-2}$	0.63	$3.6 \cdot 10^{-6}$

mances en repliement sont insuffisantes (puisque -39 dB correspond à une résolution de 6.5 bit). Même si on a vu que l'on pouvait améliorer les performances en sur-échantillonnant légèrement le signal d'entrée (voir le paragraphe 3.2.1), l'amélioration engendrée n'est pas suffisante. Par exemple, on constate une amélioration de seulement 8 dB sur le repliement total moyen pour un sur-échantillonnage d'environ 10 % ( $\eta_X = 0.9$ ). La méthode la meilleure est la méthode par approximation globale aux moindres carrés qui exploite le sur-échantillonnage dans le processus de synthèse. Sur l'exemple cité, on obtient ainsi une amélioration de 74 dB sur le repliement total pour un sur-échantillonnage d'environ 7.5 % ( $\eta_S = 0.93$ ).

On peut comprendre pourquoi les méthodes de la transformée de Fourier inverse et d'approximation locale aux moindres carrés sont limitées. Elles passent par l'élaboration des réponses fréquentielles idéales. Puis le critère consiste à minimiser l'écart entre les réponses fréquentielles des filtres de synthèse et les réponses idéales. Chaque endroit du spectre a donc le même poids dans le critère. Mais ces réponses fréquentielles idéales peuvent être difficiles à approcher, surtout en certains points particuliers où les spectres décalés se « raccordent » (tous les  $2\pi/M$ ). Or, ces points venant du signal d'entrée en bout de bande, on peut supposer que l'on ait peu de puissance dans ces zones. Cette hypothèse est réaliste en sur-échantillonnant légèrement le si-

gnal. La méthode AGMC permet de prendre en compte cela. Quant à la méthode d'approximation continue, elle est comparable à la méthode AGMC. Toutes les deux reposent en effet sur le même principe. La méthode AGMC peut être vue comme un cas particulier de la méthode AC.

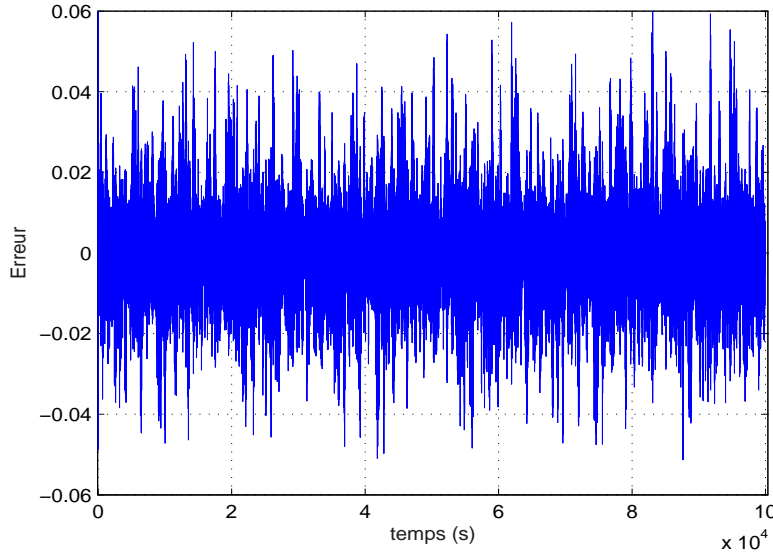
La méthode d'amélioration des filtres de synthèse est utile pour résoudre un type de problèmes non-linéaires comme celui généré par l'utilisation des filtres de synthèse en structure RII. Cette méthode minimise un critère quadratique composite entre le repliement et la distorsion. Les différents termes peuvent être pondérés pour favoriser la minimisation des erreurs de distorsion ou au contraire celle des erreurs de repliement. Si les filtres utilisés sont de type RIF, la méthode d'amélioration des filtres de synthèse, telle qu'elle est formulée, est identique à la méthode globale aux moindres carrés, le critère étant le même.

La méthode d'amélioration des filtres d'analyse optimise à la fois le banc d'analyse mais aussi, implicitement, le banc de synthèse. En effet le critère à optimiser, comportant les termes de repliement et le terme de distorsion est exprimé uniquement en fonction des paramètres des filtres d'analyse. Les coefficients des filtres RIF de synthèse, nécessaires pour le calcul des fonctions de repliement et de distorsion, sont déduits en fonction des paramètres des filtres d'analyse, par la méthode AGMC. Par conséquent, il s'agit d'une optimisation globale du banc d'analyse et du banc de synthèse. Une simple modification des fréquences de résonance et des facteurs de qualité des résonateurs composant le banc d'analyse permet une amélioration importante des performances. En même temps, cette dernière affirmation peut signifier aussi qu'une petite modification des paramètres des filtres d'analyse risque de dégrader d'une manière significative les performances du BFH. Et, comme il s'agit des filtres analogiques, l'implémentation impliquera que les valeurs obtenues en pratique seront différentes des valeurs calculées. Les bancs de filtres obtenus par cette dernière méthode risquent donc d'être plus sensibles aux erreurs d'implémentation que les bancs de filtres obtenus par les autres méthodes.

## 3.7 Simulation temporelle

Dans les paragraphes précédents diverses méthodes de synthèse des BFH ont été proposées et le repliement total et la distorsion moyenne ont été évalués par un calcul dans le domaine fréquentiel. On a montré que, le repliement total moyen, donné

par l'équation (2.66) représente l'inverse du rapport signal sur bruit de repliement du BFH. Pour vérifier ces résultats, des simulations temporelles ont été effectuées. On applique à l'entrée du BFH un signal constitué d'une somme de sinusoides d'amplitudes égales et de phases aléatoires. Les fréquences des sinusoides sont linéairement distribuées dans l'intervalle  $[0, \pi[$ . Premièrement, une simulation temporelle d'un BFH synthétisé par AGMC sans sur-échantillonnage ( $\eta_S = 1$ ) a été effectuée. Le signal d'erreur (la différence entre l'entrée et la sortie du BFH) est montré dans la figure 3.28.

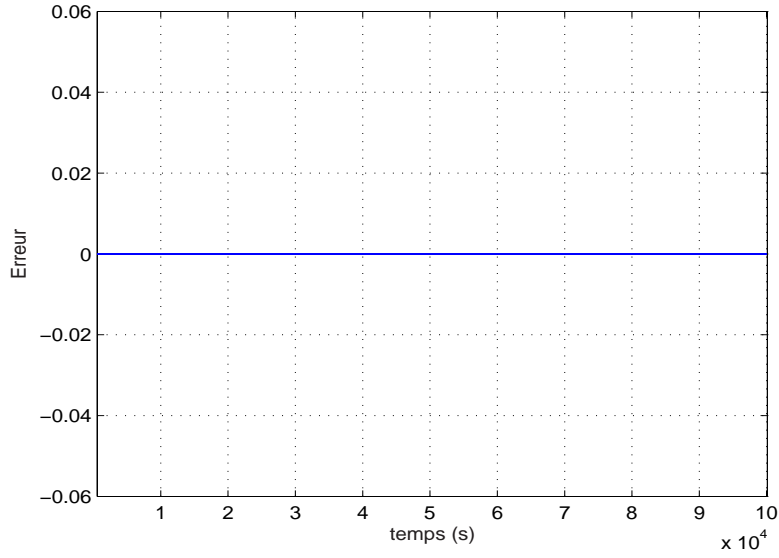


**Fig. 3.28** – Différence entre les signaux d'entrée et de sortie dans le cas d'un BFH synthétisé par AGMC,  $\eta_S = 1$

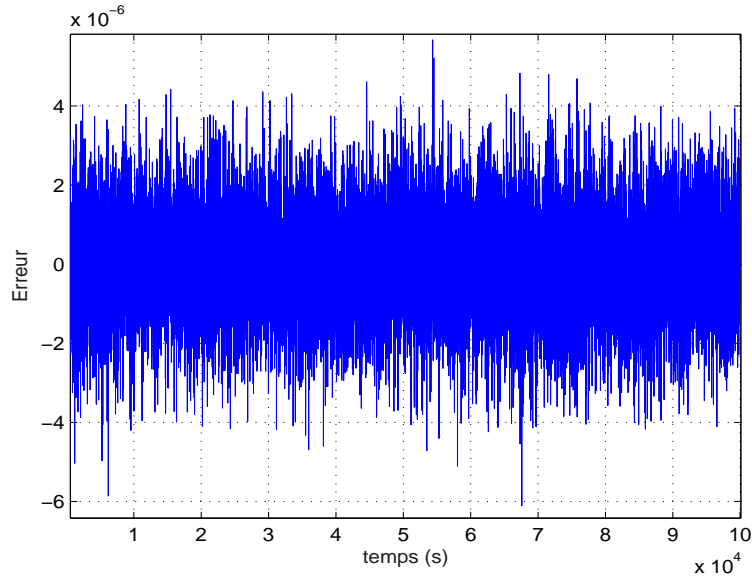
Pour comparaison, un BFH synthétisé par la méthode AGMC avec un sur-échantillonnage -  $\eta_S = 0.93$  a été simulé. La différence entre l'entrée et la sortie du BFH est présentée dans la figure 3.29.

Dans la figure 3.30 on a représenté un détail de la figure 3.29 pour distinguer l'ordre de grandeur de l'erreur dans le cas  $\eta_S = 0.93$ .

Afin de vérifier les résultats obtenus dans le domaine fréquentiel, on calcule la puissance du signal d'erreur du BFH obtenu par AGMC,  $\eta_S = 0.93$ . Le rapport signal sur bruit calculé comme la puissance du signal d'entrée sur la puissance du signal d'erreur a une valeur de 112.5 dB, ce qui est en concordance avec la valeur du repliement total moyen obtenu au paragraphe 3.3.3 (-113 dB). On remarque donc



**Fig. 3.29** – *Différence entre les signaux d'entrée et de sortie dans le cas d'un BFH synthétisé par AGMC,  $\eta_S = 0.93$  (même échelle que dans la figure 3.28)*



**Fig. 3.30** – *Différence entre les signaux d'entrée et de sortie dans le cas d'un BFH synthétisé par AGMC,  $\eta_S = 0.93$  - détail de la figure 3.29*

que le bruit de repliement est le seul qui compte dans le calcul du rapport signal sur bruit, la distorsion étant très petite.

---

## Chapitre 4

# Caractérisation et optimisation des bancs de filtres hybrides

Dans le premier paragraphe de ce chapitre on étudie le bruit de quantification global d'un CAN à BFH.

Dans le deuxième paragraphe, on analyse la sensibilité des BFH aux erreurs d'implémentation des filtres analogiques et à la représentation en virgule fixe des coefficients des filtres numériques.

Enfin, une méthode de calibration est proposée dans le paragraphe 4.3 afin de compenser la dégradation importante des performances constatée dans l'analyse de la sensibilité des BFH aux erreurs d'implémentation des filtres analogiques.

### 4.1 Bruit de quantification dans les bancs de filtres hybrides

Pour l'analyse de ce chapitre on a besoin de rappeler les définitions suivantes :

**Définition 1.** *Un processus aléatoire  $x(n)$  est **stationnaire au sens large** si :*

1.  $E\{x(n)\} = E\{x(n+k)\}, \forall k, n \in \mathbb{Z}$
2.  $E\{x(n)x^*(n-k)\} = R_{xx}(k), \forall k, n \in \mathbb{Z}$

Dans la définition ci-dessus,  $R_{xx}(k)$  est la fonction de corrélation du processus stationnaire qui ne dépend donc que de la différence de temps entre deux de ses échantillons.

**Définition 2.** *Un processus aléatoire  $x(n)$  est **cyclo-stationnaire au sens large***

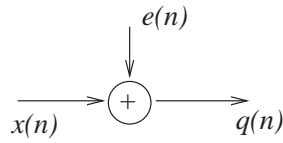
avec la période  $M$  si :

1.  $E\{x(n)\} = E\{x(n + kM)\}, \forall k, n \in \mathbb{Z}$
2.  $R_{xx}(n, k) = R_{xx}(n + M, k), \forall k, n \in \mathbb{Z}$

Dans la définition ci-dessus,  $R_{xx}(n, k)$  est la fonction de corrélation du processus cyclo-stationnaire :

$$R_{xx}(n, k) = E\{x(n)x^*(n - k)\}.$$

Pour analyser le bruit total de quantification on part du modèle classique utilisé pour le bruit de quantification à savoir celui de la figure 4.1.



**Fig. 4.1** – Modèle linéaire du quantificateur utilisé pour l'analyse du bruit de quantification

$x(n)$  est le signal à temps discret à numériser,  $q(n)$  est le signal quantifié et  $e(n)$  est le bruit de quantification. Le signal  $e(n)$  est assimilé à un bruit blanc, stationnaire ayant une densité de probabilité uniforme entre  $-\Delta/2 < e(n) < \Delta/2$ , où  $\Delta$  est le pas de quantification. On suppose aussi que  $e(n)$  n'est pas corrélé avec le signal.

Soit  $\sigma_{qm}^2$  la densité spectrale de puissance (constante) du bruit de quantification introduit par le quantificateur qui se trouve sur la branche  $m$  du BFH. Comme les quantificateurs sont identiques, on peut écrire :

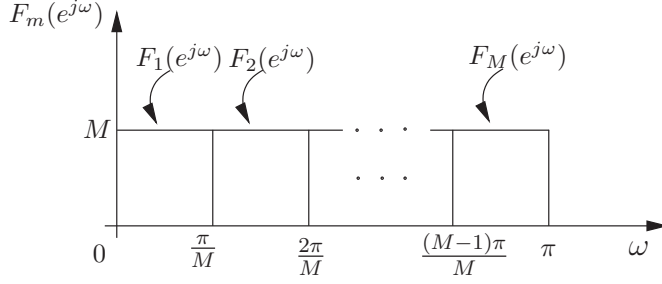
$$\sigma_{q1}^2 = \sigma_{q2}^2 = \dots = \sigma_{qM}^2 = \sigma_q^2. \quad (4.1)$$

Soit  $e_m(n)$  le bruit de quantification sur la voie  $m$  et  $z_m(n)$  le bruit de quantification sur-échantillonné et filtré par le filtre  $F_m(z)$  (voir Figure 4.2).



**Fig. 4.2** – Le bruit de quantification est sur-échantillonné et filtré sur chaque voie du BFH

On doit maintenant calculer la densité spectrale de puissance du bruit de quantification sur chaque voie après le sur-échantillonnage et le filtrage numérique. On a montré [76] que, même si le signal  $e_m(n)$  est stationnaire au sens large, la sortie du



**Fig. 4.3** – *Module des filtres de synthèse*

système représenté dans la Figure 4.2 n'est plus stationnaire au sens large.  $z_m(n)$  est un signal cyclo-stationnaire de période  $M$ . Ceci rend plus difficile l'analyse du bruit de quantification à la sortie du banc de filtres.

Pourtant, pour certains types de filtres  $F_m(z)$ , on montre que la sortie du système de la Figure 4.2 est stationnaire au sens large si l'entrée est stationnaire au sens large. Les filtres qui permettent ceci sont indiqués dans le théorème suivant, dont la preuve se trouve dans [76] :

**Théorème 1.** *Soit le système de la Figure 4.2. Le signal d'entrée  $e_m(n)$  est supposé stationnaire au sens large. Le signal de sortie  $z_m(n)$  est stationnaire au sens large si et seulement si la décimation d'un facteur  $M$  de la réponse impulsionnelle du filtre  $F_m(z)$  ne crée pas de repliement spectral. Si le filtre  $F_m(z)$  a la propriété énoncée, la densité spectrale de puissance du signal de sortie est :*

$$S_{z_m z_m}(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} S_{e_m e_m}(e^{j\omega M}) |F_m(e^{j\omega})|^2. \quad (4.2)$$

Supposons maintenant que les modules des filtres de synthèse sont comme ceux de la Figure 4.3.

On peut remarquer qu'une décimation d'un facteur  $M$  de la réponse impulsionnelle de ces filtres ne génère pas de repliement. On se trouve donc dans les conditions du théorème 1. L'amplitude des filtres de synthèse est égale à  $M$  pour que le signal de sortie soit une version échantillonnée du signal d'entrée - à un retard près (voir l'expression de la sortie du banc de filtres (2.26) où l'on considère que les modules des filtres d'analyse ont la même forme que les modules des filtres de synthèse et que leur amplitude est égale à 1).

On peut choisir pour les modules des filtres d'analyse et de synthèse des valeurs telles que leur produit soit égal à  $M$  (par exemple  $\sqrt{M}$  et  $\sqrt{M}$ , etc.) mais le rapport signal à bruit de quantification restera le même.

Pour les calculs qui suivent on considère que les bruits de quantification sur chaque branche sont décorrélés. Avec le résultat du théorème 1, la densité spectrale de puissance du bruit de quantification à la sortie d'un des filtres sur une branche est :

$$\sigma_{qom}^2 = \frac{1}{M} \sigma_q^2 |F_m(e^{j\omega})|^2. \quad (4.3)$$

La puissance du bruit de quantification à la sortie d'une voie, dans le cas des filtres de synthèse indiqués dans la figure 4.3 est donc :

$$P_{zm} = \frac{1}{M} \sigma_q^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_m(e^{j\omega})|^2 d\omega = \sigma_q^2. \quad (4.4)$$

Par conséquent le bruit total de quantification à la sortie du banc de filtres est :

$$P_z = \sum_{m=1}^M P_{zm} = M \sigma_q^2. \quad (4.5)$$

On rappelle que  $\sigma_q^2$  est aussi la puissance du bruit de quantification pour un quantificateur individuel, situé sur chaque branche. Par conséquent, la puissance du bruit de quantification d'un CAN à BFH est  $M$  fois plus élevée que celle du CAN sur chaque branche.

Pour valider les résultats théoriques précédents, plusieurs simulations temporelles ont été effectuées. On a pris en considération un BFH synthétisé par la méthode AGMC avec les paramètres donnés dans le tableau 3.9 dans le cas II. Le signal d'entrée est constitué d'une somme de sinusoides de fréquences uniformément distribuées dans la bande considérée :  $]-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ . Les phases de ces sinusoides sont aléatoires. Des simulations pour des quantificateurs sur 8, 10, 12, 14 et 16 bit ont été effectuées pour des bancs de filtres à 2, 3, 4, 6 et 8 voies. Les filtres d'analyse sont des résonateurs équidistants choisis tels que le facteur  $C$  en (4.6), pour les filtres de synthèse qui résultent en appliquant la méthode AGMC, soit le plus petit que possible. Les résultats de ces simulations sont donnés en figure 4.4. On observe l'allure logarithmique des courbes (due au logarithme  $\log(CQ^2/12M)$ , où  $C$  est défini en (4.6)).

À titre indicatif, les modules des filtres de synthèse sont représentés dans la figure 4.5. Le tableau 4.1 présente les résultats des simulations pour le cas de 16 bit de quantification.  $\sigma_o^2$  représente la densité spectrale de puissance du bruit de quantification à la sortie du banc de filtres obtenue en simulation et  $Q^2/12$  est le bruit de quantification d'un quantificateur individuel, où  $Q$  est le pas de quantification. Comme en pratique les filtres de synthèse ne sont pas conformes à la figure 4.3, on doit prendre



en considération leur gain pour le calcul théorique du bruit de quantification. Dans la deuxième ligne du tableau 4.1,  $C$  est le gain des filtres de synthèse et il est calculé avec la formule :

$$C = \sum_{m=1}^M \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_m(e^{j\omega})|^2 d\omega = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^{N-1} |f_n^{(m)}|^2 \quad (4.6)$$

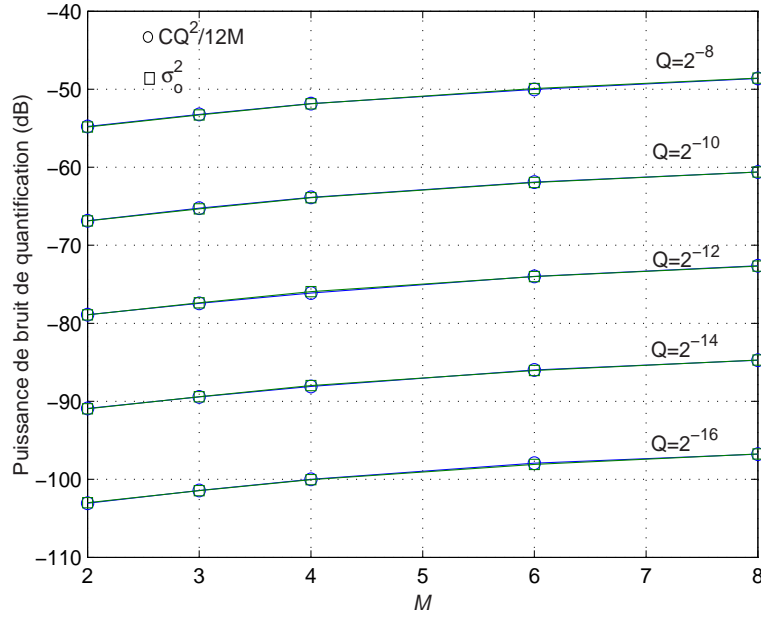
où  $f_n^{(m)}$  est le  $n$ -ième coefficient du  $m$ -ième filtre de synthèse. L'expression théorique du bruit de quantification qui se trouve dans le tableau 4.1 ( $CQ^2/12M$ ) résulte directement des équations (4.3) (4.4) et (4.5) en gardant des expressions littérales pour les fonctions de transfert des filtres de synthèse, puisqu'en général les filtres de synthèse n'ont pas la forme montrée en figure 4.3.

**Tab. 4.1** – *Bruit de quantification pour les BFH*

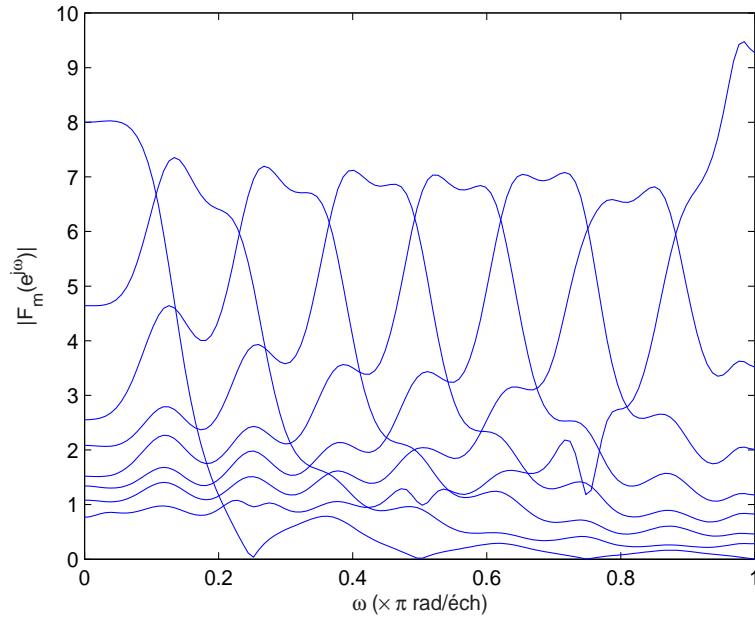
	$M = 2$	$M = 3$	$M = 4$	$M = 6$	$M = 8$
$\sigma_o^2$ - simulation (dB)	-103.0	-101.4	-100	-97.9	-96.8
$CQ^2/12M$ - théorie (dB)	-103.1	-101.5	-100.0	-98.1	-96.7

On remarque une bonne concordance entre les résultats estimés et les résultats obtenus par simulation. Les différences sont dues aux approximations. Par exemple, on a considéré que les bruits de quantification sur chaque branche étaient décorrélés, ce qui n'est pas tout à fait exact. Aussi, les fonctions de transfert des filtres de synthèse obtenus génèrent du repliement à une décimation d'un facteur  $M$ . Mais le calcul donne toutefois une bonne estimation du bruit de quantification d'un BFH.

Les simulations mettent en évidence l'importance de la somme des intégrales des modules carrés des fonctions de transfert des filtres de synthèse (le facteur  $C$ ).  $C$  est un facteur de gain du bruit et doit être minimisé. On a vu dans le paragraphe 3.3.3 que, si l'équation (3.38) accepte plusieurs solutions, on choisit celle de norme minimale. Ce choix a l'avantage de minimiser le facteur  $C$  et donc, le bruit de quantification en sortie du banc de filtres. De même, pour exploiter cette idée très importante, une synthèse de BFH qui minimise à la fois la distorsion, le repliement mais aussi le facteur  $C$  a été conçue en [8].



**Fig. 4.4** — Niveau de bruit de quantification pour 8, 10, 12, 14 et 16 bit de quantification. Simulation pour des bancs de filtres à  $M = 2, 3, 4, 6$  et 8 voies



**Fig. 4.5** — Modules des filtres de synthèse utilisés pour les simulations de bruit de quantification du BFH

## 4.2 Sensibilité des bancs de filtres hybrides

Dans ce paragraphe, on analyse la sensibilité des BFH. On présente tout d'abord, l'effet de la représentation en virgule fixe sur l'implémentation des filtres numériques. Ensuite, dans le paragraphe 4.2.2, la sensibilité des BFH aux imperfections analogiques est étudiée. Ces résultats sont publiés dans [67].

### 4.2.1 Effet de la représentation en virgule fixe des coefficients des filtres numériques

Dans le cas où le banc de synthèse du convertisseur analogique/numérique est implémenté dans des structures très simples pour lesquelles des calculs en virgule flottante ne sont pas disponibles, les coefficients des filtres doivent être quantifiés sur un certain nombre de bits en virgule fixe. De plus, les dimensions, la consommation, le temps de calcul, la taille mémoire nécessaire et le coût de fabrication sont plus faibles dans le cas des processeurs en virgule fixe que dans le cas des processeurs en virgule flottante.

La plupart des implémentations des BFH dans la littérature, mais aussi dans ce rapport sont faites avec des filtres de synthèse à réponse impulsionnelle finie. On suppose que les filtres RIF sont réalisés en forme directe. On suppose aussi que les multiplications sont faites avec une précision interne plus grande que la précision des coefficients et que seule la sortie de chaque filtre est quantifiée. Cela est souvent le cas en pratique. On analyse une implémentation des coefficients en virgule fixe et on suppose que l'implémentation analogique se fait sans erreurs.

L'erreur introduite par la quantification des coefficients peut facilement être évaluée. La fonction de transfert des filtres est :

$$F_m(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n^{(m)} e^{-j\omega n}, \quad m \in \{1, 2, \dots, M\}. \quad (4.7)$$

Si les coefficients quantifiés sont :

$$\tilde{f}_n^{(m)} = Q\{f_n^{(m)}\}, \quad m \in \{1, 2, \dots, M\}, \quad n \in \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (4.8)$$

où  $Q\{\cdot\}$  symbolise l'opération de quantification, la fonction de transfert implémentée est :

$$\tilde{F}_m(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}_n^{(m)} e^{-j\omega n}. \quad (4.9)$$

L'erreur introduite par la quantification des coefficients est :

$$E_m(e^{j\omega}) = \tilde{F}_m(e^{j\omega}) - F_m(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon_n^{(m)} e^{-jn\omega} \quad (4.10)$$

où :

$$\epsilon_n^{(m)} = \tilde{f}_n^{(m)} - f_n^{(m)}. \quad (4.11)$$

Si par exemple on utilise une quantification par troncature on a :

$$\epsilon_n^{(m)} \in [0, \Delta[, \quad (4.12)$$

où

$$\Delta = 2^{-B} \quad (4.13)$$

et  $B$  est la longueur du mot binaire des coefficients, on peut écrire :

$$|E_m(e^{j\omega})| \leq \sum_{n=0}^{N-1} |\epsilon_n^{(m)}| \leq N\Delta. \quad (4.14)$$

On veut trouver l'influence de la quantification sur les fonctions de distorsion et de repliement. L'expression de ces fonctions est donnée par (2.27) :

$$T_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M H_m\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right) F_m(e^{j\omega}) \quad (4.15)$$

pour  $p \in \{-(M-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, M-1\}$ . Alors, les fonctions de distorsion et de repliement après la quantification des coefficients des filtres de synthèse sont :

$$\begin{aligned} \tilde{T}_p(e^{j\omega}) &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M H_m\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right) \tilde{F}_m(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M H_m\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right) (E_m(e^{j\omega}) + F_m(e^{j\omega})) \end{aligned} \quad (4.16)$$

donc on peut écrire :

$$\tilde{T}_p(e^{j\omega}) = T_p(e^{j\omega}) + \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M E_m(e^{j\omega}) H_m\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right), \quad (4.17)$$

$$p \in \{-(M-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, (M-1)\}.$$

On définit l'erreur sur les fonctions de distorsion comme suit :

$$E_{T_p}(e^{j\omega}) = \tilde{T}_p(e^{j\omega}) - T_p(e^{j\omega}) \quad (4.18)$$

ou, tenant compte de (4.17) :

$$E_{T_p}(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M E_m(e^{j\omega}) H_m(j\Omega - j\frac{2\pi p}{MT}). \quad (4.19)$$

Maintenant on suppose que  $|H_m(j\Omega)| \leq 1$  et que les filtres d'analyse sont uniformément répartis dans la bande (par exemple on suppose qu'on a des résonateurs avec des fréquences de résonance uniformément réparties). Par conséquent, à la fréquence où le module d'un des filtres d'analyse (correspondant à un indice  $m_0 \in \{1, \dots, M\}$ ) est maximal (c'est à dire 1), les autres filtres (pour  $m \neq m_0$ ) présentent des atténuations suffisamment élevées pour qu'on puisse négliger dans la somme (4.19) les termes pour  $m \neq m_0$ . Tenant aussi compte de (4.14), on peut donc écrire :

$$|E_{T_p}(e^{j\omega})|_{max} \approx \frac{1}{M} \max_{m,\omega} |E_m(e^{j\omega})| = \frac{1}{M} N \Delta. \quad (4.20)$$

Si on fait une quantification par arrondi, on trouve de la même manière :

$$|E_{T_p}(e^{j\omega})|_{max} \approx \frac{1}{M} \max_{m,\omega} |E_m(e^{j\omega})| = \frac{1}{M} N \frac{\Delta}{2}. \quad (4.21)$$

L'équation (4.20) est utile dans la synthèse des BFH. En effet, après avoir calculé les bancs d'analyse et de synthèse on peut l'utiliser pour décider du nombre de bits nécessaire à la quantification des coefficients des filtres de synthèse. (Évidemment, l'erreur introduite par la quantification des coefficients doit être inférieure au niveau des erreurs de repliement et de distorsion.)

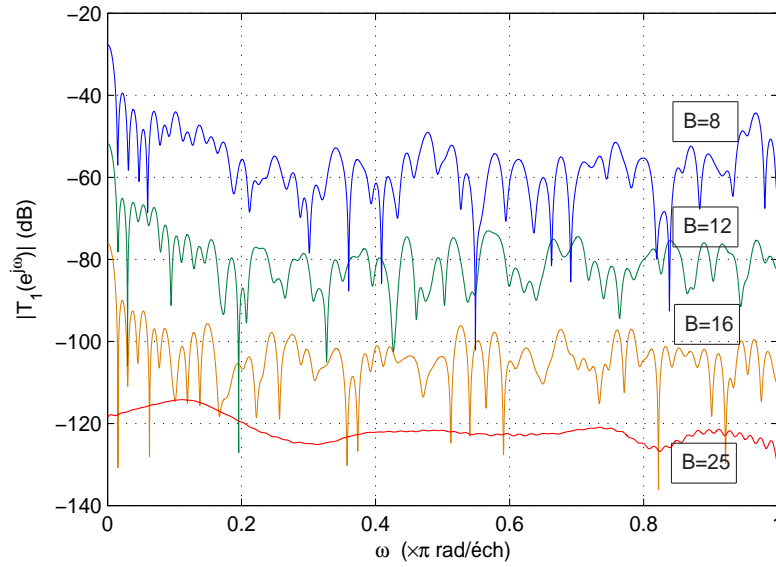
Pour montrer la validité de ce résultat, on effectue la synthèse par la méthode AGMC d'un BFH à huit voies. Les paramètres du BFH utilisé sont donnés dans le tableau 4.2. Des calculs pour  $B = 16, 18, 20, 22$  et 24 bit de quantification en virgule

**Tab. 4.2** – Paramètres de simulation de l'effet de la représentation en virgule fixe

Nb. de voies	$M = 8$
Filtres d'analyse	«Banc1» (annexe D)
Filtres de synthèse	RIF, longueur 128
Nb. de points de fréquence	$K = 256$
Sur-échantillonnage	$\eta = 0.93$
Retard	$d = 64$

fixe ont été effectués. Par exemple, pour  $B = 16$ , le niveau théorique de l'erreur de quantification sur les fonctions de repliement estimé par la relation (4.20) est de :

$$|E_{T_p}(e^{j\omega})|_{max} = 20 \log(128 * 2^{-16}/8) = -72.2 \text{ dB.}$$



**Fig. 4.6** – Influence de la quantification des coefficients des filtres de synthèse sur le module de la première fonction de repliement d'un BFH

Le niveau obtenu après la simulation est de -72.9 dB. Le niveau théorique de l'erreur de quantification sur les fonctions de distorsion estimé par la relation (4.20) est de :

$$|E_{T_p}(e^{j\omega})|_{\max} = 20 \log(1 + 128 * 2^{-16}/8) = 0.002 \text{ dB}$$

alors qu'après la simulation on obtient un niveau maximal de distorsion de 0.001 dB. Le tableau 4.3 résume les résultats obtenus. On remarque la validité des résultats théoriques, ainsi que le fait qu'à partir de 24 bit de quantification pour les coefficients des filtres de synthèse, les erreurs de quantification deviennent inférieures aux erreurs de repliement et de distorsion puisqu'on retrouve les mêmes valeurs pour ces fonctions sans quantifier les coefficients des filtres de synthèse.

La figure 4.6 présente l'influence de la quantification des coefficients des filtres de synthèse sur la première fonction de repliement. Des quantifications sur  $B = 8, 12, 16$ , et 25 bit ont été effectuées. On précise que la courbe pour  $B = 25$  se superpose à la courbe obtenue avec les coefficients non-quantifiés. Les autres fonctions de repliement ont un comportement similaire.

**Tab. 4.3** – *Performances des BFH en présence d’erreurs de quantification des coefficients des filtres de synthèse*

	Repliement maximal théorique (dB)	Repliement maximal simulation (dB)	Distorsion maximale théorique (dB)	Distorsion maximale simulation (dB)
16 bit virgule fixe	-72.9	-72.2	0.002	0.001
18 bit virgule fixe	-84.6	-84.2	0.0042	0.0023
20 bit virgule fixe	-78.3	-78.7	0.0005	0.0003
22 bit virgule fixe	-108.3	-108.1	$3.3 \cdot 10^{-5}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$
24 bit virgule fixe	-120.4	-112	$8.2 \cdot 10^{-6}$	$1.3 \cdot 10^{-5}$

#### 4.2.2 Sensibilité des bancs de filtres hybrides aux erreurs d’implémentation analogique

Le problème qui se pose maintenant est de savoir comment les erreurs d’implémentation des éléments analogiques influent sur les performances globales des BFH, à savoir les fonctions de repliement et les fonctions de distorsion.

On commence par l’étude d’un BFH ayant des résonateurs comme filtres d’analyse. Leur fonction de transfert est :

$$H_m(s) = \frac{\frac{\Omega_m}{Q_m}s}{s^2 + \frac{\Omega_m}{Q_m}s + \Omega_m^2}, \quad m \in \{2, \dots, M\}. \quad (4.22)$$

Cela correspond à une structure LC parallèle avec :

$$\Omega_m = \frac{1}{\sqrt{L_m C_m}}, \quad Q_m = \frac{R_{pm}}{\Omega_m L_m}.$$

Pour  $H_1(s)$ , une structure passe-bas est considérée, comme par exemple un simple circuit RC :

$$H_1(s) = \frac{\Omega_1}{s + \Omega_1}, \quad \Omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1} \quad (4.23)$$

où  $\Omega_1$  est la fréquence de coupure du filtre. Si on tient compte des erreurs de réalisation, les équations (4.22) et (4.23) deviennent :

$$H_m(s) = \frac{\frac{\Omega_m}{Q_m}(1 + \Delta_{1m})s}{s^2 + \frac{\Omega_m}{Q_m}(1 + \Delta_{1m})s + \Omega_m^2(1 + \Delta_{2m})}, \quad (4.24)$$

$$m \in \{2, \dots, M\},$$

$$H_1(s) = \frac{\Omega_1(1 + \Delta_{11})}{s + \Omega_1(1 + \Delta_{11})}. \quad (4.25)$$

En (4.24) et (4.25),  $\Delta_{1m}$  et  $\Delta_{11}$  sont les erreurs relatives des coefficients des filtres d'analyse :

$$\Delta_{1m} = \frac{\varepsilon_{R_m} \varepsilon_{C_m} + \varepsilon_{C_m} + \varepsilon_{R_m}}{1 + \varepsilon_{R_m} \varepsilon_{C_m} + \varepsilon_{C_m} + \varepsilon_{R_m}}, \quad m \in \{1, \dots, M\} \quad (4.26)$$

$$\Delta_{2m} = \frac{\varepsilon_{L_m} \varepsilon_{C_m} + \varepsilon_{C_m} + \varepsilon_{L_m}}{1 + \varepsilon_{L_m} \varepsilon_{C_m} + \varepsilon_{C_m} + \varepsilon_{L_m}}, \quad m \in \{2, \dots, M\} \quad (4.27)$$

où  $\varepsilon_{R_m}$ ,  $\varepsilon_{C_m}$  et  $\varepsilon_{L_m}$  sont les erreurs relatives de réalisation des composants analogiques des résonateurs (les tolérances de fabrication).

Pour évaluer l'effet des erreurs de réalisation sur les fonctions de repliement et de distorsion, une simulation de type Monte Carlo à 1000 essais a été effectuée. Les paramètres du BFH considéré sont donnés dans le tableau 4.4. Le BFH a été obtenu par la méthode AGMC.

**Tab. 4.4** – Paramètres de simulation de l'effet des erreurs analogiques

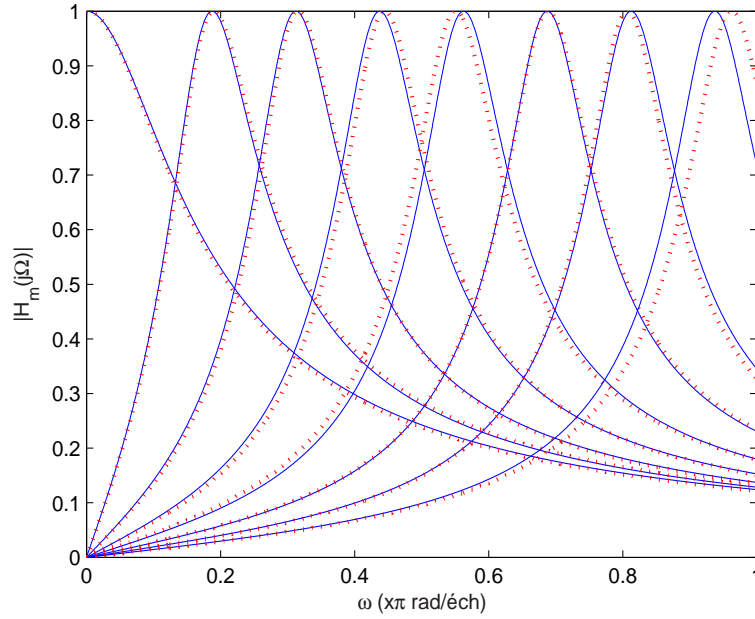
Nb. de voies	$M = 8$
Filtres d'analyse	«Banc1» (annexe D)
Filtres de synthèse	RIF, longueur 128
Nb. de points de fréquence	$K = 256$
Sur-échantillonnage	$\eta = 0.93$
Retard	$d = 64$

On a introduit d'abord une erreur de 10% pour les résistances et inductances et 1% pour les condensateurs :

$$\varepsilon_{R_m} = 0.1, \quad m \in \{1, \dots, M\},$$

$$\varepsilon_{L_m} = 0.1, \quad m \in \{2, \dots, M\},$$





**Fig. 4.7** – Modules des filtres d’analyse de type résonateurs d’ordre 2 idéaux (trait continu) et affectés par des erreurs analogiques (trait pointillé) -  $\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.1$  et  $\varepsilon_{C_m} = 0.01$

$$\varepsilon_{C_m} = 0.01, m \in \{1, \dots, M\}.$$

La figure 4.7 représente les modules des filtres d’analyse initiaux et les modules des filtres d’analyse affectés par des erreurs analogiques pour une réalisation particulière ( $\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.1$  et  $\varepsilon_{C_m} = 0.01$ ).

Les résultats de la simulation se trouvent sur la dernière ligne du tableau 4.5. On a effectué la moyenne sur 1000 essais des valeurs moyennes des fonctions de repliement global et ensuite on a calculé la valeur correspondante en décibels :  $-19$  dB. La moyenne des valeurs maximales des fonctions de repliement est de  $-14$  dB. La moyenne sur 1000 essais des valeurs moyennes de la fonction de distorsion est de  $0.04$  dB tandis que la moyenne des valeurs maximales de la fonction de distorsion est de  $0.4$  dB. On constate donc une dégradation majeure des performances du BFH. Les valeurs obtenues pour les fonctions de repliement et de distorsion ne sont pas acceptables du point de vue de la conversion analogique/numérique, d’autant plus que les valeurs de tolérance de fabrication des composants analogiques sont plutôt optimistes. (Par exemple, pour certaines technologies de fabrication des circuits intégrés, les tolérances actuelles pour les résistances peuvent même aller jusqu’à 100%.)

Pour voir l'influence du nombre de voies du banc de filtres sur la sensibilité, plusieurs simulations ont ensuite été faites en faisant varier le nombre de voies. Des bancs de filtres avec  $M = 6, 4, 3$  et 2 voies ont été synthétisés. Les filtres d'analyse sont toujours des résonateurs avec des largeurs de bande égales et dont les fréquences de résonance sont équidistantes. Les filtres de synthèse (des RIF à 128 coefficients) sont calculés par la méthode AGMC. Des simulations de type Monte Carlo à 1000 essais ont été effectuées. Les erreurs relatives des composants des filtres analogiques sont :  $\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.1$  et  $\varepsilon_{C_m} = 0.01$ . Les résultats de ces simulations sont montrés dans le tableau 4.5.

**Tab. 4.5** – *Influence du nombre de voies sur la sensibilité des BFH - simulation pour  $\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.1$  et  $\varepsilon_{C_m} = 0.01$  avec des résonateurs*

	Sans				Avec			
	erreurs analogiques				erreurs analogiques			
	$ T_0(e^{j\omega}) $ moyenne (dB)	$ T_0(e^{j\omega}) $ maximum (dB)	Repl. moyen (dB)	Repl. maximal (dB)	$ T_0(e^{j\omega}) $ moyenne (dB)	$ T_0(e^{j\omega}) $ maximum (dB)	Repl. moyen (dB)	Repl. maximal (dB)
$M = 2$	$1.5 \cdot 10^{-9}$	$1.2 \cdot 10^{-6}$	-153	-136	0.001	0.1	-33	-28
$M = 3$	$1.7 \cdot 10^{-9}$	$2.6 \cdot 10^{-6}$	-150	-138	0.01	0.2	-29	-24
$M = 4$	$1.7 \cdot 10^{-9}$	$1.2 \cdot 10^{-6}$	-148	-135	0.01	0.3	-26	-21
$M = 6$	$1.9 \cdot 10^{-9}$	$1.5 \cdot 10^{-6}$	-142	-127	0.02	0.6	-22	-17
$M = 8$	$3.4 \cdot 10^{-8}$	$1.3 \cdot 10^{-5}$	-113	-111	0.04	0.4	-19	-14

On observe dans le tableau 4.5 presque la même détérioration des performances des BFH pour toutes les valeurs de  $M$ . Il y a toutefois une détérioration moins grande si le nombre de voies diminue, mais ceci est dû au fait que les performances initiales des bancs de filtres correspondants, non-affectés par les erreurs d'implémentation, étaient meilleures.

Ensuite, plusieurs simulations Monte Carlo à 1000 essais ont été effectuées en faisant varier l'erreur relative des composants analogiques. Les paramètres du BFH synthétisé par la méthode AGMC sont donnés dans le tableau 4.4. Les résultats sont montrés dans le tableau 4.6. La figure 4.8 représente le module de la première fonction de repliement (obtenue sur un seul essai d'une simulation Monte Carlo) du BFH à

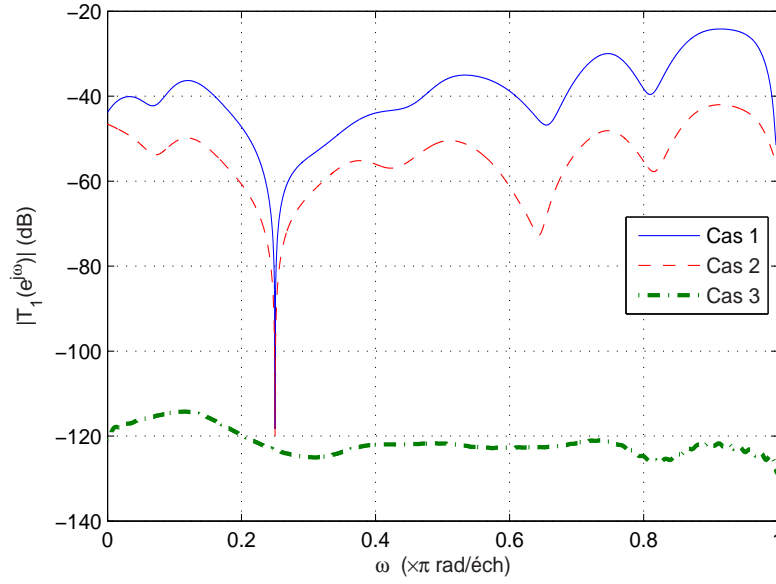
huit voies dans trois cas :

- Cas 1 - BFH affecté par  $\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.1$  et  $\varepsilon_{C_m} = 0.01$ ,
- Cas 2 - BFH affecté par  $\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.01$  et  $\varepsilon_{C_m} = 0.005$ ,
- Cas 3 - BFH non-affecté par les erreurs analogiques.

**Tab. 4.6** – *Sensibilité d'un BFH à huit voies aux erreurs d'implémentation des filtres analogiques. Le banc d'analyse est constitué de résonateurs*

	Sans erreurs	$\varepsilon_{R_m} = 0.1,$ $\varepsilon_{L_m} = 0.1,$ $\varepsilon_{C_m} = 0.01$	$\varepsilon_{R_m} = 0.05,$ $\varepsilon_{L_m} = 0.05,$ $\varepsilon_{C_m} = 0.01$	$\varepsilon_{R_m} = 0.01,$ $\varepsilon_{L_m} = 0.01,$ $\varepsilon_{C_m} = 0.01$	$\varepsilon_{R_m} = 0.01,$ $\varepsilon_{L_m} = 0.01,$ $\varepsilon_{C_m} = 0.005$
Distorsion moyenne (dB)	$3.4 \cdot 10^{-8}$	0.04	0.01	0.001	0.0005
Distorsion maximale (dB)	$1.3 \cdot 10^{-5}$	0.4	0.46	0.15	0.12
Repliement moyen (dB)	-113	-19	-25	-34	-39
Repliement maximal (dB)	-111	-14	-20	-30	-35

La figure 4.9 montre les modules de la fonction de distorsion obtenus. On peut observer dans les figures 4.8 et 4.10 un phénomène intéressant. À la pulsation normalisée  $\omega = \frac{\pi}{4}$  les fonctions de repliement ont des valeurs très bonnes (très réduites), quel que soit le taux d'erreur analogique. Ceci est dû au fait que les caractéristiques des résonateurs ont des zéros à l'origine et que, pour le calcul de la première fonction de repliement (pour  $p = 1$ ) l'origine des fonctions de transfert des filtres analogiques est décalée sur le point  $\frac{2\pi p}{M} = \frac{\pi}{4}$  (voir la relation de calcul des fonctions de repliement (2.27)). Comme on peut le constater dans la formule (4.24), le zéro des caractéristiques de transfert des résonateurs n'est pas affecté par les erreurs analogiques.



**Fig. 4.8** – *Module de la première fonction de repliement d'un BFH à huit voies dans 3 cas : Cas 1 - BFH affecté par  $\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.1$  et  $\varepsilon_{C_m} = 0.01$ , Cas 2 - BFH affecté par  $\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.01$  et  $\varepsilon_{C_m} = 0.005$ , et Cas 3 - BFH idéal. Le banc d'analyse est le «Banc1»*

La figure 4.10 présente l'évolution du module de la première fonction de repliement sur 40 essais d'une simulation Monte Carlo, pour le cas  $\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.1$  et  $\varepsilon_{C_m} = 0.01$ .

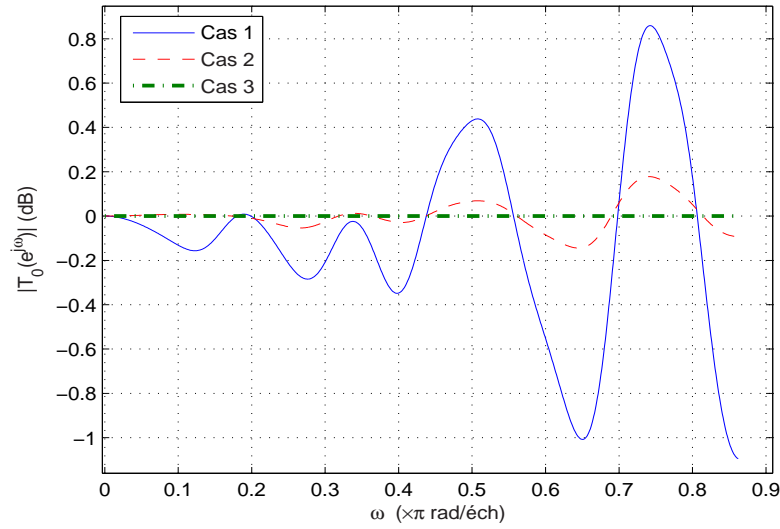
Ces résultats montrent une très grande sensibilité des fonctions de repliement et de distorsion aux erreurs analogiques, quel que soit le nombre de canaux du banc de filtres. Même pour des erreurs inférieures à ce que l'on peut rencontrer dans des techniques intégrées à coût raisonnable, les performances des BFH deviennent inacceptables du point de vue de la conversion analogique/numérique.

On effectue la même étude en partant d'un banc d'analyse composé de filtres Butterworth d'ordre trois. La figure 4.11 donne le schéma d'un filtre Butterworth passe bas d'ordre trois.

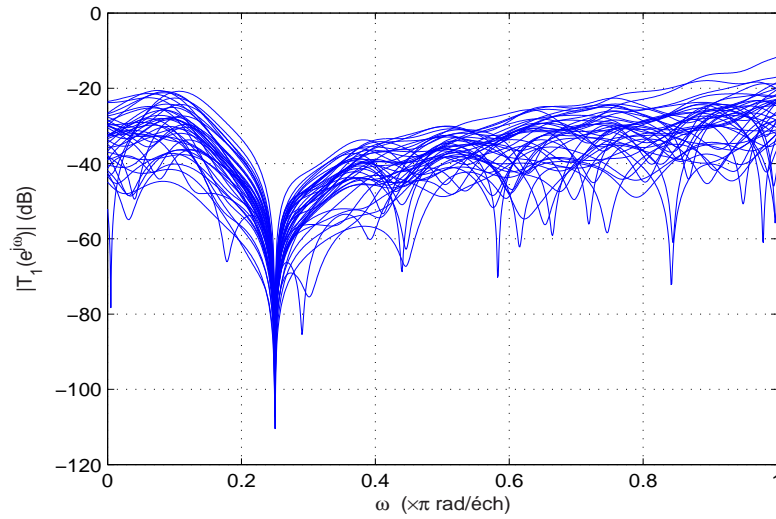
Les valeurs normées des composants dans la figure 4.11 sont :

$$r_0 = r_4 = c_1 = c_3 = 1$$

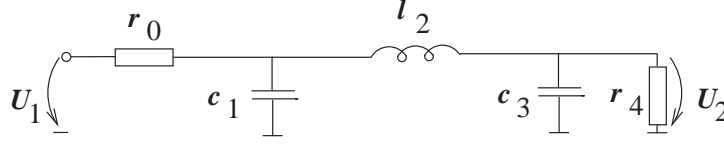
$$l_2 = 2.$$



**Fig. 4.9** – Module de la fonction de distorsion d'un BFH à huit voies dans 3 cas : Cas 1 - BFH affecté par  $\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.1$  et  $\varepsilon_{C_m} = 0.01$ , Cas 2 - BFH affecté par  $\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.01$  et  $\varepsilon_{C_m} = 0.005$ , et Cas 3 - BFH idéal. Le banc d'analyse est le «Banc1»



**Fig. 4.10** – Évolution de la première fonction de repliement d'un BFH à huit voies sur 40 essais Monte Carlo - BFH affecté par  $\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.1$  et  $\varepsilon_{C_m} = 0.01$ . Le banc d'analyse est le «Banc1»



**Fig. 4.11** – *Filtre Butterworth d'ordre 3 utilisé dans l'étude de la sensibilité des BFH*

Les valeurs réelles sont calculées avec les formules bien connues :

$$R_k = r_k R_0, k \in \{0, 4\} \quad (4.28)$$

$$L_k = l_k \frac{R_0}{\Omega_t}, k = 2 \quad (4.29)$$

et

$$C_k = c_k \frac{1}{R_0 \Omega_t}, k \in \{1, 3\} \quad (4.30)$$

où  $\Omega_t$  est la pulsation de coupure du filtre passe-bas et  $R_0$  est une résistance de référence. Pour le filtre passe-bas, on a choisi

$$\Omega_t = \frac{\pi}{MT}.$$

Les filtres passe-bande sont obtenus à partir du prototype passe-bas par une transformation de fréquence. Si la fréquence complexe normalisée pour le filtre passe-bas est :

$$s_{nB} = \frac{s_B}{\Omega_t}$$

et la fréquence complexe normalisée pour le passe-bande est :

$$s_{nPB} = \frac{s_{PB}}{\Omega_0}$$

la transformation de fréquence utilisée est :

$$s_{nB} = \frac{s_{nPB}^2 + 1}{s_{nPB} \delta} \quad (4.31)$$

où  $\delta$  est la largeur de la bande passante :

$$\delta = \frac{\Omega_{t2} - \Omega_{t1}}{\Omega_0}$$

et  $\Omega_0$  est la moyenne géométrique des deux pulsations de coupure :

$$\Omega_0 = \sqrt{\Omega_{t1} \Omega_{t2}}.$$

La relation (4.31) transforme les inductances normées (de valeur  $l$ ) dans un circuit série LC, avec une inductance de valeur normée  $l/\delta$  et une capacité de valeur normée  $\delta/l$ . La capacité est transformée par (4.31) dans un circuit parallèle LC, avec une inductance de valeur normée  $\delta/c$  et une capacité de valeur normée  $c/\delta$ . Pour obtenir les valeurs réelles des éléments des filtres passe bande, les mêmes relations sont utilisées - (4.28), (4.29) et (4.30) - dans lesquelles on remplace  $\Omega_t$  par  $\Omega_0$ . Les pulsations de coupure des filtres passe bande pris en compte pour la simulation sont :

$$\Omega_{t1m} = \frac{(m-1)\pi}{MT}$$

$$\Omega_{t2m} = \frac{m\pi}{MT}$$

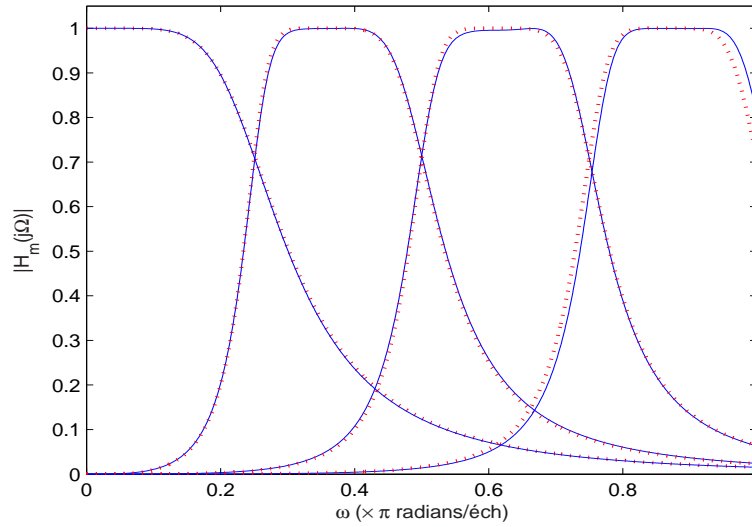
pour

$$m \in \{2, \dots, M\}$$

où  $\Omega_{t1m}$  et  $\Omega_{t2m}$  sont les deux pulsations de coupure du filtre  $H_m(j\Omega)$ . On effectue des simulations Monte Carlo à 1000 essais pour plusieurs valeurs des erreurs relatives de réalisation des composants analogiques. On considère un banc de filtres à 4 voies.

**Tab. 4.7** – *Sensibilité d'un BFH à 4 voies aux erreurs d'implémentation des filtres analogiques. Le banc d'analyse est constitué de filtres Butterworth d'ordre 3. Comparaison à un BFH réalisé avec des résonateurs*

		Sans erreurs	$\varepsilon_{R_m} = 0.1,$ $\varepsilon_{L_m} = 0.1,$ $\varepsilon_{C_m} = 0.01$	$\varepsilon_{R_m} = 0.05,$ $\varepsilon_{L_m} = 0.05,$ $\varepsilon_{C_m} = 0.01$	$\varepsilon_{R_m} = 0.01,$ $\varepsilon_{L_m} = 0.01,$ $\varepsilon_{C_m} = 0.01$	$\varepsilon_{R_m} = 0.01,$ $\varepsilon_{L_m} = 0.01,$ $\varepsilon_{C_m} = 0.005$
Distorsion moyenne (dB)	Butterworth	$4.6 \cdot 10^{-7}$	0.04	0.01	0.001	0.0005
	Résonateurs	$1.7 \cdot 10^{-9}$	0.01	0.02	0.0004	0.0004
Distorsion maximale (dB)	Butterworth	$3.3 \cdot 10^{-4}$	0.4	0.2	0.07	0.05
	Résonateurs	$1.2 \cdot 10^{-6}$	0.3	0.2	0.05	0.04
Repliement moyen (dB)	Butterworth	-96	-26	-32	-43	-45
	Résonateurs	-148	-26	-31	-41	-43
Repliement maximal (dB)	Butterworth	-88	-17	-23	-34	-36
	Résonateurs	-135	-22	-27	-37	-39



**Fig. 4.12** – Modules des filtres d'analyse de type Butterworth d'ordre 3 idéaux (trait continu) et affectés par des erreurs analogiques (trait pointillé) -  $\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.1$  et  $\varepsilon_{C_m} = 0.01$

Les filtres de synthèse (des RIF à 128 coefficients) ont été trouvés par la méthode AGMC. Les modules des filtres d'analyse sont montrés en figure 4.12 pour un essai d'une simulation Monte Carlo, pour  $\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.1$  et  $\varepsilon_{C_m} = 0.01$ . En trait continu on a représenté les modules non-affectés par les erreurs analogiques, et en trait pointillé, les modules affectés par les erreurs analogiques. Le tableau 4.7 donne les résultats et permet de comparer ces résultats avec ceux obtenus avec le banc d'analyse constitué par des résonateurs.

On constate dans le cas des BFH avec des filtres d'analyse Butterworth la même dégradation des performances à cause des erreurs d'implémentation analogique que dans le cas des résonateurs.

La sensibilité des BFH est par conséquent extrêmement importante pour des erreurs analogiques même très réduites.

Pour comprendre les causes de cette grande sensibilité des BFH par rapport aux valeurs des composantes des filtres analogiques on part de l'équation donnant les fonctions de distorsion et de repliement d'un BFH :

$$T_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M H_m \left( j \left( \Omega - \frac{2\pi p}{MT} \right) \right) F_m(e^{j\omega}) \quad (4.32)$$

pour  $p \in \{-(M-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, M-1\}$ . Pour le cas d'un BFH affecté par des



erreurs analogiques on peut écrire :

$$\tilde{T}_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \tilde{H}_m\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right) F_m(e^{j\omega}) \quad (4.33)$$

où  $\tilde{H}_m(j\Omega)$  est la fonction de transfert du  $m$  - ième filtre analogique après l'implémentation :

$$\tilde{H}_m(j\Omega) = H_m(j\Omega) + H_{me}(j\Omega). \quad (4.34)$$

$H_{me}(j\Omega)$  est donc l'erreur sur la fonction de transfert due à l'implémentation. L'erreur sur les fonctions de repliement et de distorsion est :

$$\begin{aligned} E_{T_p}(e^{j\omega}) &= \tilde{T}_p(e^{j\omega}) - T_p(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M H_{me}(j\Omega - j\frac{2\pi p}{MT}) F_m(e^{j\omega}). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Supposons maintenant que les filtres de synthèse ont les modules indiqués dans la figure 4.3. Par conséquent, pour tout  $\omega_0 \in [-\pi, \pi]$ , la somme en (4.35) a un seul terme différent de zéro. On peut donc écrire :

$$|E_{T_p}(e^{j\omega})| = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M |H_{me}(j\Omega - j\frac{2\pi p}{MT}) F_m(e^{j\omega})| \quad (4.36)$$

et aussi :

$$|E_{T_p}(e^{j\omega})|_{Max} \approx \max_{\omega, m} \frac{1}{M} |H_{me}(j\Omega - j\frac{2\pi p}{MT}) F_m(e^{j\omega})| \quad (4.37)$$

pour un certain  $m \in \{1, \dots, M\}$ .

On peut donc affirmer que le module de l'erreur sur les fonctions de distorsion et de repliement a le même ordre de grandeur que le module de l'erreur sur les fonctions de transfert des filtres analogiques. Prenons les résonateurs comme exemple de filtres d'analyse. En évaluant les fonctions de transfert avec des erreurs de 1% pour les inductances et les résistances et 0.5% pour les capacités, on constate que le module maximum de l'erreur sur les fonctions de transfert ( $\max_{\omega, m} |H_{me}(j\Omega)|$ ) est de l'ordre de 0.01, et donc le repliement maximal va aussi être de l'ordre de 0.01, soit -40 dB, résultat confirmé par les simulations Monte Carlo.

De très petites erreurs d'implémentation provoquent de très petites erreurs sur les fonctions de transfert analogiques. L'ordre de grandeur des erreurs sur les fonctions de repliement et de distorsion est comparable à l'ordre de grandeur des erreurs sur les

fonctions de transfert. Si ces erreurs peuvent paraître acceptables pour les dernières, elles ne le sont pas du point de vue des fonctions de repliement et donc, du bruit introduit sur le signal échantillonné.

## 4.3 Calibration des bancs de filtres hybrides

On a vu dans le paragraphe précédent que les BFH sont très sensibles à de très petites erreurs d'implémentation analogique. Des erreurs de l'ordre de 10% pour les résistances et les inductances et 1% pour les capacités rendent les BFH inutilisables pour la réalisation des convertisseurs analogique/numérique.

Ce chapitre présente une méthode de calibration des BFH pour atténuer les effets des erreurs analogiques.

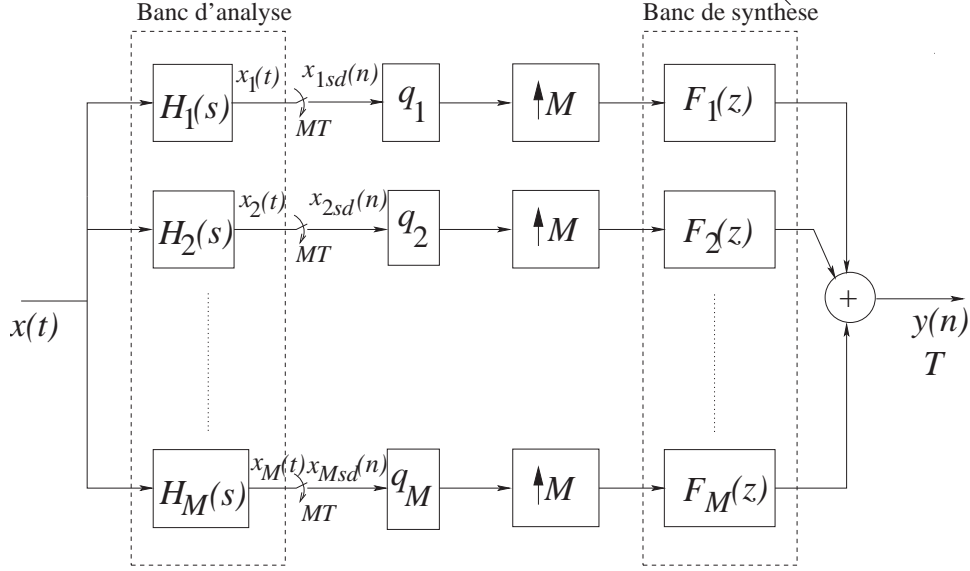
### 4.3.1 Approche de calibration

Après l'implémentation, à cause des erreurs de réalisation, les conditions de reconstruction parfaite (2.29) ne sont plus satisfaites. Les filtres analogiques obtenus après la réalisation doivent être estimés pour pouvoir recalculer le banc de filtres de synthèse afin que les conditions de reconstruction parfaite soient de nouveau approchées le mieux possible. Pour calculer les filtres de synthèse, les méthodes présentées dans le chapitre 2 ont besoin seulement d'un nombre fini ( $K$ ) de valeurs des réponses en fréquence des filtres d'analyse. Dans la phase d'estimation, le signal d'entrée de test suivant (normalisé à sa valeur maximale) est utilisé :

$$s_t(t) = \sum_{k=1}^K \sin\left(k \frac{\pi}{T(K+1)} t\right), \quad (4.38)$$

où  $K$  est un nombre entier, positif. Ce signal représente un « peigne » dans le domaine fréquence avec les raies équidistantes. Dans la pratique, il pourrait être généré séquentiellement sans que le principe de la calibration change. En appliquant ce signal à l'entrée du BFH, les signaux sur chaque canal après le filtrage analogique sont (voir figure 4.13) :

$$x_m(t) = \sum_{k=1}^K \left| H_m\left(jk \frac{\pi}{T(K+1)}\right) \right| \cdot \sin\left(k \frac{\pi}{T(K+1)} t + \arg\left\{ H_m\left(jk \frac{\pi}{T(K+1)}\right) \right\}\right). \quad (4.39)$$



**Fig. 4.13** – *Banc de filtres hybride*

Soit  $x_{ms}(n)$  la version échantillonnée de  $x_m(t)$  avec la période d'échantillonnage égale à  $T$  :

$$x_{ms}(n) = x_m(nT). \quad (4.40)$$

Le signal en (4.40) est un signal périodique de période  $2(K+1)$  et admet un développement en série exponentielle dont les coefficients nous donneront les valeurs des réponses en fréquence des filtres analogiques dont on a besoin. Soit  $x_{msd}$  la version décimée d'un facteur  $M$  du signal  $x_{ms}(n)$  :

$$x_{msd}(n) = x_{ms}(Mn). \quad (4.41)$$

Puisque la pulsation maximale du signal en (4.39) est  $\frac{K\pi}{(K+1)T}$ , l'échantillonnage avec  $T_s = MT$  génèrera des repliements de spectre. La transformée de Fourier du signal  $x_{msd}(nT)$  est :

$$X_{msd}(e^{j\Omega MT}) = \frac{1}{MT} \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_m \left( j \left( \Omega - p \frac{2\pi}{MT} \right) \right). \quad (4.42)$$

La pulsation normalisée des signaux sur chaque canal ( $x_{msd}(n)$ ) est  $\omega_d = \Omega MT$ . L'intervalle d'intérêt est  $-\pi < \omega_d < \pi$ , soit  $-\pi/MT < \Omega \leq \pi/MT$ . Par conséquent, on peut écrire :

$$\begin{cases} -\frac{K\pi}{(K+1)T} + \frac{2\pi p}{MT} \leq \frac{\pi}{MT} \\ \frac{K\pi}{(K+1)T} + \frac{2\pi p}{MT} > -\frac{\pi}{MT} \end{cases} \quad (4.43)$$

d'où il résulte que les termes intéressants correspondent à des valeurs de  $p$  dans l'intervalle suivant :

$$-\left(\frac{1}{2} + \frac{M}{2} \frac{K}{K+1}\right) < p \leq \frac{1}{2} + \frac{M}{2} \frac{K}{K+1}. \quad (4.44)$$

La superposition de deux dents arrive si, après le sous-échantillonnage, deux raies appartenant à deux décalés distincts de  $X_m(j\Omega)$  ont la même fréquence, soit :

$$\frac{\pi}{K+1}k_1 - \frac{2\pi}{M}p_1 = \frac{\pi}{K+1}k_2 - \frac{2\pi}{M}p_2 \quad (4.45)$$

$$k_1, k_2 \in \{-K, \dots, -1, 1, \dots, K\}$$

$p_1, p_2$  satisfaisant la condition (4.44). Tenant compte de (4.45), on peut écrire :

$$k_1 = k_2 - (p_2 - p_1) \frac{2}{M}(K+1) \quad (4.46)$$

et il est évident que si aucun des termes  $2(p_2 - p_1)(K+1)$  avec  $p_1, p_2$  satisfaisant (4.44) n'est divisible par  $M$ , l'équation (4.45) n'a pas de solution pour  $k_1, k_2, p_1$  et  $p_2$  entiers. Par conséquent, le sous-échantillonnage des signaux en (4.39) ne générera pas de superposition de raies si :

$$2(p_2 - p_1)(K+1) \mod M \neq 0 \quad (4.47)$$

avec  $p_1, p_2$  satisfaisant la condition (4.44) où  $\mod$  signifie la fonction modulo. En choisissant par exemple  $M$  et  $K+1$  premiers, la condition (4.47) est clairement satisfaite. De plus, le signal décimé est aussi un signal périodique avec la période  $T_x = 2(K+1)$ . Il contient donc le même nombre de composantes spectrales et les mêmes coefficients de la série exponentielle que le signal en (4.40) (comme il n'y a pas de repliement, les différents composantes spectrales ne se superposent pas, donc les  $2(K+1)$  coefficients de la série exponentielle du signal décimé sont les mêmes que les  $2(K+1)$  coefficients de la série exponentielle du signal non-décimé). La différence entre les deux séries est que l'ordre des coefficients de la série du premier signal n'est pas respecté dans la série du deuxième signal. Nous disposons donc du signal décimé et, par une analyse fréquentielle, on peut trouver les coefficients de sa série exponentielle. Ensuite, il faut les mettre dans l'ordre correct pour retrouver les coefficients de la série exponentielle du signal non-décimé et donc, les valeurs de la transformée de Fourier de chaque filtre d'analyse dans les points de fréquence choisis.

Pour chaque valeur de  $p$  dans l'intervalle défini par (4.44) on peut calculer l'ordre  $k$  des composantes spectrales du signal non-décimé (dont le spectre est décalé de  $\frac{2\pi p}{MT}$ )

qui entrent dans l'intervalle d'intérêt ( $-\pi < \omega_d < \pi$  ou, équivalent  $-\pi/MT < \Omega \leq \pi/MT$ ) :

$$-\frac{\pi}{MT} < k \frac{\pi}{(K+1)T} + \frac{2\pi p}{MT} < \frac{\pi}{MT} \quad (4.48)$$

et on obtient les valeurs maximales et minimales de  $k$  :

$$k_{m,p} = \left\lceil \frac{-1-2p}{M}(K+1) \right\rceil \quad (4.49)$$

et

$$k_{M,p} = \left\lfloor \frac{1-2p}{M}(K+1) \right\rfloor \quad (4.50)$$

où  $\lceil x \rceil$  signifie arrondi supérieur de  $x$  et  $\lfloor x \rfloor$  signifie arrondi inférieur de  $x$ .

Maintenant, la fréquence d'une composante spectrale du signal décimé est de type  $k' \frac{\pi}{(K+1)MT}$ . Cette composante provient d'une composante du signal non-décimé de type  $k \frac{\pi}{(K+1)T}$ , décalée de  $\frac{2\pi p}{MT}$ . Donc on en déduit la relation entre les indices des composantes spectrales résulte en posant :

$$k' \frac{\pi}{(K+1)MT} = k \frac{\pi}{(K+1)T} + \frac{2\pi p}{MT} \quad (4.51)$$

ou :

$$k' = kM + 2p(K+1). \quad (4.52)$$

Soit  $a_k$  les composantes spectrales du signal non-décimé et  $a'_k$  les composantes spectrales du signal décimé. On peut donc déduire un algorithme pour trouver la relation entre  $a_k$  et  $a'_k$  :

- i. Pour chaque valeur de  $p$  satisfaisant (4.44), on calcule :

$$k_{m,p} = \left\lceil \frac{-1-2p}{M}(K+1) \right\rceil \quad (4.53)$$

et

$$k_{M,p} = \left\lfloor \frac{1-2p}{M}(K+1) \right\rfloor \quad (4.54)$$

- ii. Pour chaque valeur de  $p$  dans l'intervalle (4.44) et pour  $k \in \{k_{m,p}, \dots, k_{M,p}\}$ , on calcule  $a_k$  avec :

$$a_k = a'_{kM+2p(K+1)}. \quad (4.55)$$

### 4.3.2 Effet du bruit de quantification sur la calibration

Cette section étudie l'influence du bruit de quantification des quantificateurs qui se trouvent sur chaque canal sur le processus de calibration. Dans le paragraphe 4.3.1 on a présenté une méthode de calibration basée sur l'analyse de Fourier des réponses sous-échantillonnées des filtres analogiques à un signal de test de type peigne. Cette analyse fréquentielle nous donne les coefficients de la série exponentielle des signaux sur chaque canal et donc, on obtient ainsi les valeurs des réponses fréquentielles des filtres d'analyse pour un certain nombre de points de fréquence. À partir de ces valeurs on recalcule les filtres de synthèse (avec l'une des méthodes exposées dans le chapitre 3) qui permettent de reconstruire le signal le mieux possible. Mais les quantificateurs affectent les signaux sur chaque voie, donc les valeurs des réponses fréquentielles des filtres d'analyse ne seront pas exactement estimées. Supposons que  $f_{en}^{(m)}$  pour  $m \in \{1, \dots, M\}$  sont les réponses impulsionnelles des filtres de synthèse obtenus après la calibration.

Pour évaluer l'erreur, soit  $h_m(t)$  les réponses impulsionnelles réelles et  $h_{me}(t)$ ,  $m \in \{1, \dots, M\}$  les réponses impulsionnelles des filtres d'analyse évaluées par la calibration. L'erreur entre  $h_m(t)$  est  $h_{me}(t)$  :

$$n_m(t) = h_m(t) - h_{me}(t). \quad (4.56)$$

Elle peut être vue comme un bruit additif (un bruit blanc, stationnaire au sens large, avec une densité uniforme de probabilité). Les signaux sur chaque canal sont :

$$x_m(t) = x(t) * h_m(t) = x(t) * h_{me}(t) + x(t) * n_m(t) \quad (4.57)$$

où  $*$  est l'opérateur de convolution. Après un échantillonnage à la période  $MT$  et après la quantification :

$$x_m(n) = u_{mD}(n) + d_{mD}(n) + e_m(n) \quad (4.58)$$

où  $e_m(n)$  est le bruit de quantification,  $u_m(n) = [x(t) * h_{me}(t)]|_{t=nT}$ ,  $d_m(n) = [x(t) * n_m(t)]|_{t=nT}$  et  $v_D(n) = v(Mn)$  est la version décimée d'un facteur  $M$  du signal  $v(n)$ .

Si  $v_I(n)$  est la version sur-échantillonnée d'un facteur  $M$  du signal  $v(n)$ , alors on peut écrire :

$$y(n) = \sum_{m=1}^M [u_{mDI}(n) * f_{en}^{(m)}] + \sum_{m=1}^M [d_{mDI}(n) * f_{en}^{(m)}] + \sum_{m=1}^M [e_{mI}(n) * f_{en}^{(m)}]. \quad (4.59)$$

La transformée de Fourier de la première somme de l'expression (4.59) peut être écrite comme en (2.28) :

$$Y_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{p=-(M-1)}^{M-1} X(j\Omega - j\frac{2\pi p}{MT}) T_{pe}(e^{j\omega}) \quad (4.60)$$

avec :

$$T_{pe}(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M F_{me}(e^{j\omega}) H_{me}(j\Omega - j\frac{2\pi p}{MT}) \quad (4.61)$$

où  $\{H_{me}\}$  sont les réponses fréquentielles des filtres d'analyse évalués et  $\{F_{me}\}$  les réponses fréquentielles des filtres de synthèse obtenus à partir de  $H_{me}$  par une des méthodes de synthèse des BFH. Par conséquent, la première somme de (4.59) représente le terme désiré qui décrit la reconstruction presque parfaite du signal d'entrée. La deuxième somme représente l'erreur introduite par les quantificateurs dans le processus de calibration. La troisième somme est l'erreur classique de quantification. Les effets de ces erreurs sont étudiés ci-dessous.

Supposons que l'erreur  $n_m(t)|_{t=nT}$  est un bruit blanc stationnaire au sens large de moyenne zéro et de variance  $\sigma_1^2$ . Par conséquent, la densité spectrale de puissance de  $d_m(n)$  est :

$$\Phi_{ddm}(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^2 \sigma_1^2 \quad (4.62)$$

où  $X(e^{j\omega})$  est la transformée de Fourier de la version échantillonnée du signal d'entrée,  $x(nT)$ . On suppose aussi que la transformée de Fourier du signal d'entrée est :

$$X(j\Omega) = \begin{cases} 1, & -\Omega_M < \Omega < \Omega_M \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (4.63)$$

Alors, après la décimation d'un facteur  $M$ , on peut facilement trouver la densité spectrale de puissance de  $d_{mD}(n)$  :

$$\Phi_{ddmD}(e^{j\omega_M}) = \sigma_1^2 \quad (4.64)$$

avec  $\omega_M = \Omega MT$ . Pour trouver une estimation de l'erreur due aux quantificateurs, supposons de nouveau que les filtres de synthèse ont les modules comme dans la figure 4.3. On rappelle que l'amplitude des filtres de synthèse est égale à  $M$  pour que l'amplitude du signal de sortie du banc de filtres soit égale à l'amplitude du signal d'entrée (voir l'expression de la sortie du banc de filtres (2.26) où l'on considère que les modules des filtres d'analyse ont la même forme que les modules des filtres de

synthèse et que leur amplitude est égale à 1). Comme une décimation d'un facteur  $M$  de la réponse impulsionnelle de ces filtres ne générera pas de repliement de spectre, les sorties des filtres de synthèse lorsque leurs entrées sont les signaux  $d_{mD}(n)$ , sur-échantillonnés d'un facteur  $M$ , sont des signaux stationnaires au sens large avec la densité spectrale de puissance donnée par [76] :

$$\Phi_{yym}(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \Phi_{ddmD}(e^{j\omega M}) |F_m(e^{j\omega})|^2. \quad (4.65)$$

On suppose que les bruits de quantification sur chaque voie sont décorrélés. La puissance totale de bruit qu'on retrouve dans le signal de sortie à cause de l'effet de la quantification sur le processus de calibration est alors :

$$P_{cn} = \sum_{m=1}^M \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{yym}(e^{j\omega}) d\omega. \quad (4.66)$$

À l'aide de (4.64) et (4.65), on peut trouver :

$$P_{cn} = M\sigma_1^2. \quad (4.67)$$

On a vu dans le paragraphe 4.1 que la puissance du bruit de quantification à la sortie d'un BFH est :

$$P_e = M\sigma_2^2 \quad (4.68)$$

où  $\sigma_2^2$  est la variance du signal  $e_m(n)$  supposé un bruit blanc, stationnaire au sens large, avec la moyenne zéro.

De (4.67) et (4.68), la puissance totale du bruit dû à la quantification dans la phase de calibration du CAN, mais aussi à la quantification dans la phase de fonctionnement normal du CAN est :

$$P = P_{cn} + P_e = M(\sigma_1^2 + \sigma_2^2). \quad (4.69)$$

Comme les quantificateurs sont les mêmes dans les deux phases de fonctionnement on peut supposer que  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ , et donc que :

$$P = P_{cn} + P_e = 2M\sigma^2. \quad (4.70)$$

Mais en pratique, les filtres de synthèse ne sont pas comme sur la figure 4.3. Pour tenir compte de l'effet d'amplification du bruit de quantification par les filtres de synthèse, on peut écrire, comme dans le paragraphe 4.1 :

$$P = P_{cn} + P_e = 2C\sigma^2/M. \quad (4.71)$$



où, en supposant que les filtres de synthèse sont des filtres à réponse impulsionnelle finie :

$$C = \sum_{m=1}^M \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_m(e^{j\omega})|^2 d\omega = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^{N-1} |f_n^{(m)}|^2 \quad (4.72)$$

et  $f_n^{(m)}$  est le  $n$ -ième coefficient du  $m$ -ième filtre de synthèse. La formule (4.71) peut être facilement obtenue à partir de (4.65) et (4.66) en gardant les intégrales sous forme littérale, puisque maintenant on ne connaît pas l'expression des fonctions de transfert des filtres de synthèse.

L'équation (4.70) (ou (4.71)) montre que la puissance totale de bruit de quantification dans le cas d'un CAN à BFH calibré est deux fois plus élevée que dans le cas d'un CAN réalisé avec un BFH idéal, comme on peut l'obtenir après synthèse.

Une simulation temporelle d'un BFH affecté par des erreurs analogiques a été effectuée. Le BFH a été obtenu par la méthode AGMC et a été affecté par des erreurs analogiques. Les paramètres de la simulation sont donnés dans le tableau 4.8.

**Tab. 4.8** – Paramètres de simulation pour la méthode de calibration

Nb. de voies	$M = 8$
Filtres d'analyse	«Banc1» (annexe D)
Filtres de synthèse	RIF, longueur 128
Nb. de sinusoides dans le signal de test	$K = 128$
Sur-échantillonnage	$\eta = 0.93$
Retard	$d = 64$
Erreurs analogiques	$\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.1, \varepsilon_{C_m} = 0.01$

On utilise des quantificateurs à 16 bit sur chaque canal. On applique la procédure de calibration exposée dans le paragraphe 4.3.1 et les réponses fréquentielles des filtres d'analyse sont estimées. À partir de ces estimations, les coefficients des réponses impulsionnelles des filtres de synthèse sont recalculés par la méthode AGMC, donc le banc de filtres est calibré. Le tableau 4.9 résume les performances du banc de filtres sans erreurs d'implémentation et les performances avec erreurs de réalisation, avant et après la procédure de calibration.

Il est évident que, tout comme les erreurs de quantification, plus le nombre de bits de quantification est élevé, plus les erreurs de calibration dues à la quantification diminuent. En utilisant la formule (4.70) on peut déduire, pour un BFH particulier, le nombre de bits nécessaires pour que le bruit de quantification (affectant l'opération

normale du CAN en structure BFH avec erreurs analogiques et calibré) soit comparable au bruit de repliement.

**Tab. 4.9** – *Performances d'un BFH à huit voies affecté par des erreurs de réalisation avant et après la calibration. Paramètres de la simulation - donnés au tableau 4.8. La quantification se fait sur 16 bit.*

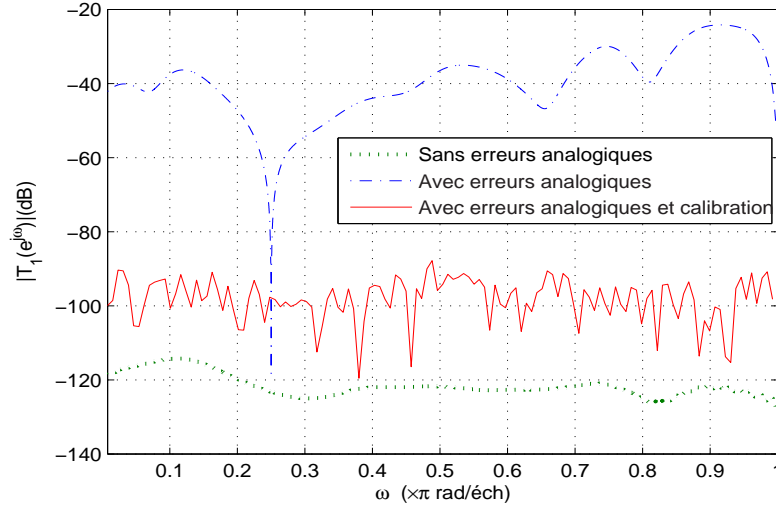
	Repliement moyen (dB)	Repliement maximal (dB)	Distorsion moyenne (dB)	Distorsion maximale (dB)
Sans erreurs analogiques	-113	-111	$3.4 \cdot 10^{-8}$	$1.3 \cdot 10^{-5}$
Avec erreurs analogiques avant calibration	-19	-14	0.04	0.4
Avec erreurs analogiques après calibration	-96	-85	$2.2 \cdot 10^{-8}$	$3.9 \cdot 10^{-4}$

La figure 4.14 montre le module de la première fonction de repliement pour le BFH idéal et pour le même banc de filtres affecté par des erreurs analogiques de  $\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.1$  avant et après calibration.

La figure 4.15 présente le module de la fonction de distorsion pour la même simulation et les mêmes cas que dans la figure précédente. Dans la figure 4.15 les deux courbes de distorsion correspondant aux cas idéal et calibré sont superposées. La figure 4.16 représente un détail de la figure 4.15 pour pouvoir observer la fonction de distorsion dans les deux cas. On observe dans les trois figures l'amélioration évidente apportée par la calibration.

Pour vérifier les résultats théoriques obtenus au paragraphe 4.3.2 une simulation temporelle du BFH calibré a aussi été effectuée. Le signal d'entrée est un signal aléatoire similaire à celui utilisé dans les simulations temporelles du paragraphe 4.1. Il s'agit d'un signal composé d'une somme de sinusoides de même amplitude, avec les fréquences réparties uniformément dans l'intervalle considéré. Les phases des sinusoides sont aléatoires.

La quantification des signaux se fait sur 16 bit, donc l'erreur de quantification est beaucoup plus importante que l'erreur de repliement. Par conséquent dans cette



**Fig. 4.14** — *Module de la première fonction de repliement d'un BFH à huit voies en trois cas -BFH idéal, BFH affecté par  $\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.1$  et  $\varepsilon_{C_m} = 0.01$  et BFH affecté par les erreurs analogiques et calibré. Paramètres de la simulation - donnés au tableau 4.8. La quantification se fait sur 16 bit.*

simulation on pourra observer l'effet de la quantification sur la calibration.

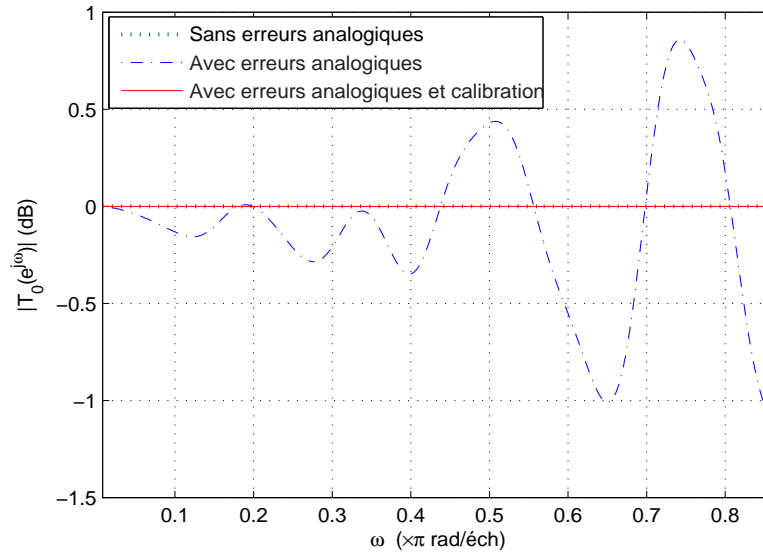
La variance de l'erreur en sortie pour un BFH affecté par des imperfections analogiques et calibré est de  $4.23 \cdot 10^{-10}$  tandis que la variance de l'erreur en sortie pour le banc de filtres sans erreurs analogiques est de  $2.12 \cdot 10^{-10}$ . On observe donc que la variance de l'erreur dans le cas avec des erreurs et calibré est deux fois supérieure à la variance de l'erreur dans le cas idéal, comme estimé théoriquement par la formule (4.70) ou, plus général (4.71). La variance du bruit de quantification total estimée par la formule (4.71) est de  $4.25 \cdot 10^{-10}$  ce qui constitue donc une estimation correcte de la variance de bruit obtenu en simulation.

### 4.3.3 Amélioration de la méthode de calibration

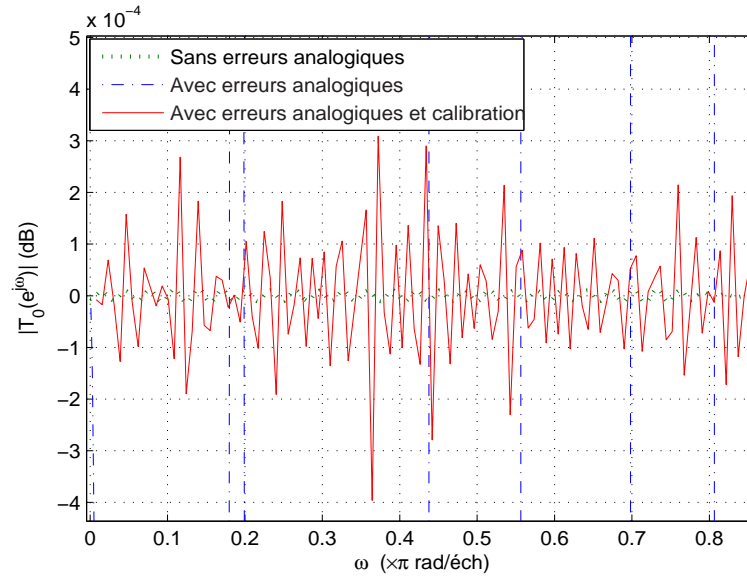
Pour diminuer, voire éliminer l'effet du bruit de quantification sur le processus de calibration, on propose dans ce paragraphe une méthode de calibration modifiée.

Dans cette méthode on utilise comme signal de test :

$$s_t(t) = \sum_{k=1}^K b_k \sin(k \frac{\pi}{T(K+1)} t), \quad (4.73)$$



**Fig. 4.15** – *Module de la fonction de distorsion d'un BFH à huit voies en trois cas -BFH idéal, BFH affecté par  $\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.1$  et  $\varepsilon_{C_m} = 0.01$  et BFH affecté par les erreurs analogiques et calibré. Paramètres de la simulation - donnés au tableau 4.8. La quantification se fait sur 16 bit.*



**Fig. 4.16** – *Détail de la figure 4.15*

Maintenant, chaque sinus est multipliée par une amplitude  $b_k$ . Alors, les signaux sur chaque canal après le filtrage analogique sont :

$$x_m(t) = \sum_{k=1}^K \left| H_m(jk \frac{\pi}{T(K+1)}) \right| b_k \cdot \sin \left( k \frac{\pi}{T(K+1)} t + \arg \left\{ H_m(jk \frac{\pi}{T(K+1)}) \right\} \right). \quad (4.74)$$

Par conséquent, après le sous-échantillonnage et la quantification on a :

$$x_{mq}(n) = \sum_{k=1}^K \left| H_m(jk \frac{\pi}{T(K+1)}) \right| b_k \cdot \sin \left( k \frac{\pi}{T(K+1)} nMT + \arg \left\{ H_m(jk \frac{\pi}{T(K+1)}) \right\} \right) + z_m(n) \quad (4.75)$$

où  $z_m(n)$  est le bruit de quantification introduit par le quantificateur sur la voie  $m$ .

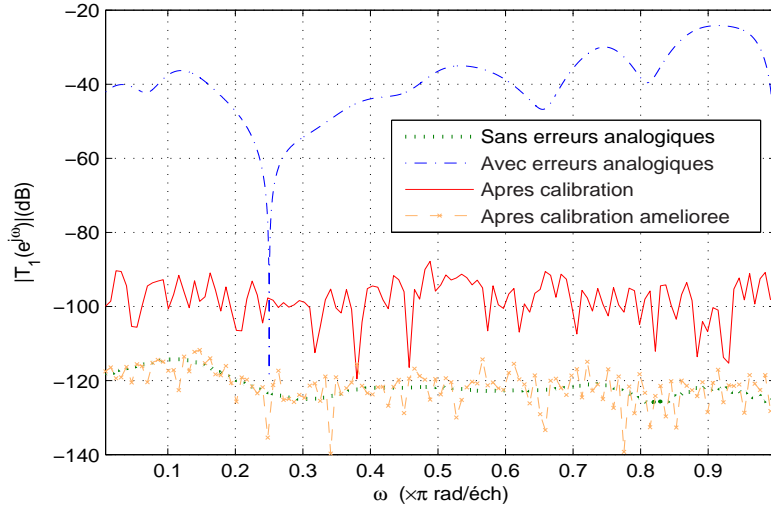
Pour éliminer l'effet du bruit de quantification sur la calibration, l'idée est d'appliquer plusieurs fois le signal de test en faisant varier les valeurs de  $b_k$ . On suppose que les  $b_k$ , pour  $k \in \{1, \dots, K\}$  sont des variables aléatoires. Après chaque test, sur chaque voie, on enregistre le signal après le quantificateur. Enfin, on fait la moyenne des tests :

$$E\{x_{mq}(n)\} = \sum_{k=1}^K \left| H_m(jk \frac{\pi}{T(K+1)}) \right| E\{b_k\} \cdot \sin \left( k \frac{\pi}{T(K+1)} nMT + \arg \left\{ H_m(jk \frac{\pi}{T(K+1)}) \right\} \right) + E\{z_m(n)\}. \quad (4.76)$$

Mais le bruit de quantification est supposé une variable aléatoire de moyenne nulle, donc  $E\{z_m(n)\} = 0$ . Ainsi, l'effet du bruit de quantification est annulé. Ensuite on peut appliquer la méthode exposée dans le paragraphe précédent pour trouver les valeurs des fonctions de transfert des filtres analogiques pour les fréquences choisies. La seule différence est que maintenant, le module de la transformée de Fourier des filtres d'analyse à la fréquence  $k \frac{\pi}{T(K+1)}$  est multiplié par le facteur  $E\{b_k\}$ . Comme les signaux de test sont connus, ce facteur de multiplication est aussi connu.

Pour vérifier cette méthode de calibration améliorée, une simulation du même BFH dont les paramètres sont donnés dans le tableau 4.8 a été effectuée. Mille signaux de

type (4.73) ont été appliqués à l'entrée du BFH.  $b_k$  sont des variables aléatoires, uniformément distribuées dans l'intervalle  $[0.5, 1]$ . On utilise des quantificateurs sur 16 bits. Le niveau de repliement moyen obtenu après la calibration améliorée est de -112 dB par rapport aux -113 dB dans le cas du BFH idéal. Dans la figure 4.17 on présente comparativement la première fonction de repliement pour un BFH idéal, affecté par les erreurs analogiques, et calibré par les deux méthodes.



**Fig. 4.17** – *Module de la première fonction de repliement d'un BFH à huit voies en quatre cas -BFH idéal, BFH affecté par  $\varepsilon_{R_m} = \varepsilon_{L_m} = 0.1$  et  $\varepsilon_{C_m} = 0.01$  et BFH affecté par les erreurs analogiques et calibré par les deux méthodes. Paramètres de la simulation - donnés au tableau 4.8.*

Dans ce chapitre on a étudié plusieurs caractéristiques des BFH, comme le bruit de quantification total à la sortie des bancs de filtres, les effets générés par la quantification en virgule fixe des coefficients des filtres de synthèse, la sensibilité des BFH aux erreurs d'implémentation analogiques. On a constaté une grande sensibilité des BFH par rapport aux imperfections d'implémentation. Pour y remédier, une méthode de calibration du BFH après la réalisation a été proposée et évaluée. Elle permet d'obtenir un BFH réel avec des performances similaires à un BFH idéal. Même si la mise en oeuvre de cette méthode reste difficile elle permet cependant de montrer qu'il existe au moins une solution théorique au problème de l'hypersensibilité des BFH aux imperfections de l'analogique.

---

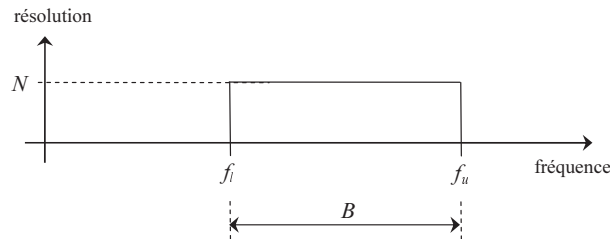
# Chapitre 5

## Conclusion

En guise de conclusion, les résultats principaux de cette étude sont tout d'abord rassemblés sous la forme d'une marche à suivre pour dimensionner les BFH. Enfin, le bilan de ces travaux nous permet de proposer une suite à ces recherches afin de valider la solution à BFH comme une solution pour les systèmes de numérisation du futur.

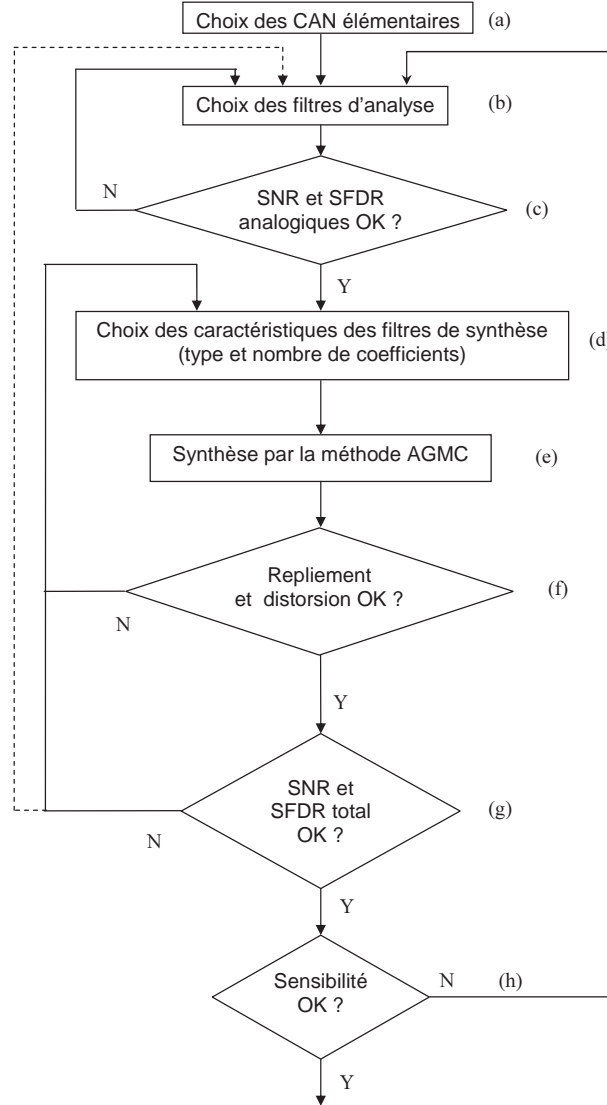
### 5.1 Dimensionnement d'un CAN à BFH

Le cahier des charges pour la conception d'un BFH doit fournir une bande de fréquence  $[f_l, f_u]$  et une résolution  $N$  (en bit) (figure 5.1). Nous proposons une méthodologie de conception afin d'aboutir à un BFH qui réponde au mieux au cahier des charges. Cette méthodologie fait appel aux résultats obtenus au cours de ces deux thèses.



**Fig. 5.1** – *Objectif de conversion*

L'organigramme donné en figure 5.2 décrit les étapes de conception du BFH.



**Fig. 5.2** – *Organigramme de conception d'un BFH*

### Étape (a) : choix des convertisseurs élémentaires et de leur nombre

Il faudra tout d'abord déterminer la résolution minimale nécessaire pour chaque convertisseur élémentaire.

Une étude sur le bruit de quantification [40] montre que la résolution d'un BFH composé de  $M$  voies conserve la résolution du CAN élémentaire pour un signal large-bande. Par contre, pour un signal bande étroite, le rapport signal sur bruit est dégradé de  $10 \log_{10}(M)$  dB. Ceci est dû au fait que les bruits de quantification des  $M$  voies s'ajoutent. Mais on peut imaginer que, une fois identifié un signal d'intérêt à bande



étroite, on reconfigure le BFH afin qu'il travaille sur un nombre plus réduit de voies. Dans le cas d'un signal très étroit (sinusoïde par exemple), on peut reconstruire le signal à partir d'une voie seulement. On se ramène alors à une conversion classique avec la résolution du CAN élémentaire. On considère donc qu'un BFH ne dégrade pas la résolution en terme de quantification théorique des convertisseurs élémentaires. On peut donc choisir un CAN élémentaire dont la résolution est  $N$ .

Supposons que l'on dispose d'un CAN de fréquence d'échantillonnage  $f_e = 2b$ . On en déduit donc que le nombre de voies doit être au moins égal à l'arrondi entier supérieur de  $B/b$ . Dans le cadre de notre étude, nous avons choisi le nombre de voies  $M$  égal à cette valeur car nous souhaitons minimiser le nombre de filtres analogiques et de CAN élémentaires.

*Remarque : On rappelle que chaque CAN élémentaire doit avoir une bande passante d'entrée (soit celle de l'échantillonneur/bloqueur) compatible avec la bande de fréquence  $[f_l, f_u]$ .*

### Étapes (b) et (c) : choix du banc d'analyse

Ce choix est fortement lié à la technologie visée. L'idée est de partir de la solution la plus simple à réaliser en analogique. Nous avons vu que la solution la plus économique est celle à simulation d'inductance. C'est donc la première à développer. Celle-ci peut s'avérer insuffisante à cause des points suivants :

- le problème de la linéarité ;
- la dégradation du rapport signal sur bruit due à l'électronique.

Dans ce cas, il faudra envisager une autre solution comme les filtres BAW qui semblent plus avantageux au niveau de la linéarité et du rapport signal sur bruit.

À partir d'une structure donnée a priori satisfaisante sur le plan de la linéarité et du rapport signal sur bruit, on doit répartir les filtres d'analyse en fonction de leurs caractéristiques. Nous avons vu dans l'annexe D, que si les filtres présentent des largeurs de fréquence identiques, on privilégie une répartition linéaire, alors que si les filtres ont des facteurs de qualité identiques, on les répartit plutôt de manière logarithmique.

**Étape (d) : choix du type de filtres de synthèse et du nombre de coefficients**

Si des contraintes sont connues sur la cible matérielle de la partie numérique du BFH (DSP, FPGA, solutions mixtes ...), il faut en tenir compte à ce stade afin d'évaluer la dimension maximale du filtrage numérique. D'autre part, la résolution souhaitée permet de dimensionner la largeur minimale (en nombre de bits) pour les données. Pour celle-ci, on en déduit le nombre de coefficients maximal des filtres.

Dans un premier temps, on développera la solution à filtres RIF. On pourra tout d'abord partir d'un nombre de coefficients faible. Si le résultat de l'étape (d) n'est pas satisfaisant, alors on augmente le nombre de coefficients. Si des contraintes sont connues ou si les longueurs deviennent déraisonnables (par exemple 1024 coefficients pour une donnée de 16 bit), alors, il faudra remettre en question les filtres analogiques (par exemple en choisissant une autre structure).

Pour être exhaustif, il faudra aussi envisager la solution RII et ré-itérer le même traitement pour ce type de filtres.

**Étape (e) : synthèse par la méthode AGMC ou AC**

Pour le banc d'analyse, chaque type (RIF et RII) et chaque dimension de filtre de synthèse envisagée, il faudra utiliser la méthode AGMC ou AC pour les RIF (ALMC ou Padé complété par une optimisation pour les RII).

À cette étape, on pourra éventuellement rajouter une optimisation des caractéristiques des filtres d'analyse.

**Étape (f) : validation des performances**

La synthèse précédente débouche sur des performances en terme de repliement total et en terme de distorsion. Il faudra vérifier si le repliement est compatible avec la résolution désirée. Si le résultat est positif alors on poursuivra la conception. Si le résultat est négatif, on a plusieurs possibilités. Dans la mesure du possible, on peut relâcher les contraintes sur la distorsion et effectuer une nouvelle synthèse. Sinon, il faudra augmenter le nombre de coefficients des filtres jusqu'à obtenir satisfaction ou dépasser les dimensions maximales des filtres numériques.

**Étape (g) : calcul des SNR et SFDR totaux**

La synthèse fournit des coefficients flottants pour les filtres de synthèse qui remplissent les conditions requises en terme de repliement et de distorsion. Il faudra ensuite prendre en compte la quantification du signal, celle des coefficients des filtres numériques ainsi que la précision des calculs. Il faudra aussi tenir compte des limitations analogiques. On devra ainsi évaluer le SNR et le SFDR total du BFH. Si ce dernier est compatible avec la résolution souhaitée, on poursuivra par une étude de la sensibilité. Si ce n'est pas le cas, suivant l'origine de la faiblesse de performance, il faudra soit reprendre le traitement au niveau du dimensionnement du banc de synthèse (étape (d)) soit remettre en cause le banc d'analyse (étape b).

**Étape (h) : évaluation de la sensibilité**

À cette étape, il faut calculer l'impact des défauts de l'analogique sur les performances du BFH. Si le BFH est trop sensible aux imperfections, il faut alors reconsidérer le banc d'analyse dans l'objectif d'améliorer sa sensibilité. Or ce travail montre l'importance de la sensibilité des BFH (voir le chapitre 4 de la thèse de Tudor Petrescu). Il est peu probable qu'en changeant simplement de structure de filtre d'analyse, ce problème soit résolu. Il faudra sans doute faire appel à des bancs d'analyse dont on peut faire varier les caractéristiques ou imaginer un dispositif qui mesure les caractéristiques du banc d'analyse afin de recalculer les filtres de synthèse correspondants (comme la calibration).

## 5.2 Bilan

Ce travail a montré certaines caractéristiques supplémentaires des BFH (en plus de leur capacité d'élargissement de la bande utile) :

- leur versatilité grâce à la méthode de focalisation spectrale,
- leur capacité à être bâtis à partir de filtres analogiques facilement implémentables,
- leur capacité à être synthétisés à l'aide des différentes méthodes dont ce travail a montré partiellement les avantages et les inconvénients,
- leur grande sensibilité aux imperfections de la partie analogique.

Plus précisément, grâce au travail sur les méthodes de synthèse, on peut, en fonction d'une technologie de filtrage analogique disponible, élaborer des filtres de synthèse qui minimisent le repliement et la distorsion. On retiendra essentiellement le principe de la méthode d'approximation globale qui, parmi les méthodes étudiées, est celle qui donne les meilleures performances en terme de repliement et de distorsion. De plus, nous avons montré que grâce à cette méthode et en sur-échantillonnant de quelques pourcents le signal d'entrée, on améliore les performances pour une longueur donnée des filtres de synthèse.

De plus, cette étude présentée dans le chapitre 4 du mémoire de Caroline Lelandais-Perrault permet de concevoir un système dynamiquement modifiable et adaptable à différentes modulations et différentes largeurs de bande. En effet, le banc de synthèse étant numérique, on peut modifier ses caractéristiques par logiciel. Or nous avons mis au point un critère (celui utilisé par la méthode AGMC) qui est paramétrable et qui permet de choisir les caractéristiques du BFH. On peut ainsi favoriser la distorsion par rapport au repliement, ainsi que favoriser la résolution dans une bande de fréquence donnée (focalisation spectrale).

## **Conclusion et perspectives sur la caractérisation et l'optimisation**

Dans le chapitre 4, nous avons étudié plusieurs caractéristiques des bancs de filtres hybrides. Tout d'abord le bruit de quantification a été étudié et nous avons montré par calcul théorique mais aussi par simulation que la puissance du bruit de quantification d'un quantificateur qui se trouve sur une voie est multipliée non seulement par le nombre de voies mais aussi par un facteur qui dépend du gain des filtres numériques de synthèse.

Ensuite, nous avons étudié les effets de la quantification des coefficients des filtres de synthèse sur nombre fini de bits. Le cas des filtres à réponse impulsionnelle finie (le plus souvent rencontré dans la pratique) a été considéré et les quantifications en virgule fixe ont été examinées. Une formule théorique qui estime le bruit introduit par la quantification des coefficients des filtres de synthèse a été déduite et des simulations qui confirment la validité de la formule ont été effectuées.

Le caractère hybride des bancs de filtres étudiés implique des problèmes spécifiques liés à l'implémentation analogique. C'est la raison pour laquelle l'étude de l'effet des imperfections de réalisation analogique s'impose obligatoirement. Nous avons montré que de très petites variations des valeurs des composants analogiques par rapport aux

valeurs nominales obtenues après la synthèse, détériorent gravement les performances du banc de filtres. Si les valeurs de repliement étaient initialement inférieures à -120 dB on obtient des valeurs de repliement de -30 dB pour un banc de filtres hybride affecté par des erreurs d'implémentation. Ces valeurs sont inacceptables du point de vue de l'utilisation des bancs de filtres hybrides pour la conversion analogique-numérique et expliquent pourquoi, à notre connaissance il n'existe pas encore de réalisations opérationnelles.

Nous avons donc proposé une solution originale à ce problème. Il s'agit d'une calibration du banc de filtres après sa réalisation. À l'aide d'un signal de test, nous estimons les fonctions de transfert des filtres analogiques obtenues après leur implémentation. À partir de ces estimations, nous ajustons les filtres de synthèse afin que les conditions de reconstruction parfaite soient de nouveau satisfaites. Nous étudions ensuite les performances de cette méthode de calibration et nous montrons par calcul théorique que, à cause des quantificateurs, le processus de calibration est aussi affecté par un bruit. Nous montrons que la puissance du bruit total de quantification dans le cas d'un banc de filtres hybride affecté par des erreurs d'implémentation et calibré est deux fois supérieure à la puissance du bruit de quantification à la sortie d'un banc de filtres idéal (qui n'est pas affecté par des erreurs d'implémentation). Nous proposons aussi une méthode de calibration conçue pour annuler l'effet du bruit de quantification sur la calibration. Le repliement moyen après la calibration revient à de niveaux autour de -120 dB pour un banc de filtres contenant des quantificateurs sur 16 bits. Tous les résultats théoriques sont confirmés par des simulations.

D'autres aspects des BFH sont encore à étudier. L'étude présente sur la calibration se limite encore à une simple faisabilité : dans l'optique d'une véritable implémentation, le signal de test devrait être généré par logiciel, donc être vraisemblablement moins complexe. Il serait donc nécessaire d'étudier les signaux adéquats à utiliser. Une perspective très amont poursuivie à l'heure actuelle dans le Département des Signaux et Systèmes Électroniques (thèse de Davud Asemani) serait d'estimer de façon aveugle (c'est-à-dire en ne faisant que des hypothèses simples sur le signal d'entrée) les imperfections des filtres analogiques.

L'influence de la quantification n'a été étudiée que sur le signal et les coefficients des filtres numériques. La quantification des variables de calcul reste à étudier. De la même manière, l'optimisation de la complexité calculatoire par des méthodes de type « minimisation du nombre de 1 », telles que l'on rencontre dans les convertisseurs

sigma-delta pourrait amener des améliorations significatives.

En réagissant maintenant sur les méthodes de synthèse, on pourrait songer aussi à intégrer une certaine optimisation vis-à-vis justement de la sensibilité aux imperfections (analogiques ou générées par les quantifications). La synthèse s'écrit alors : « Minimiser l'influence des imperfections sous des contraintes de recouvrement ou de distorsion ». Cette voie pourrait être très avantageuse, mais il semble difficile d'en trouver une approche satisfaisante du point de vue théorique.

Un autre aspect reste à explorer. Il s'agit de l'étude de l'effet du repliement spectral dans le cas des signaux réels qui ne sont pas de bande parfaitement limitée. Effectivement, avant la conversion analogique-numérique, le signal à convertir est typiquement filtré pour limiter la bande. Mais comme ces filtres ne sont pas idéaux, une analyse de l'effet de repliement du spectre en dehors de la bande utile considérée jusqu'à présent devrait être faite, en tenant compte des caractéristiques des filtres de limitation de bande.

---

## Annexe A

# Conversion analogique/numérique classique - Rappel des caractéristiques et état de l'art

Rappelons les quatre caractéristiques principales d'un convertisseur classique de type Nyquist sont :

- sa fréquence d'échantillonnage maximale ;
- sa résolution ou nombre de bits de codage ;
- sa résolution effective (à ne pas confondre avec la résolution dans le sens nombre de bits de codage) ;
- sa bande de fréquence d'entrée (liée à la performance de l'échantillonneur-bloqueur éventuel) ;
- sa consommation.

Pour un convertisseur analogique/numérique, il existe plusieurs caractéristiques que l'on appelle résolution. Tout d'abord, la résolution qui correspond au nombre de bits de codage. Mais ce nombre de bits de codage est en fait choisi lors de la conception du convertisseur en fonction d'une autre caractéristique qu'est la résolution effective qui est le plus souvent définie comme ci-après. On suppose que l'on injecte un signal sinusoïdal d'excursion maximale à l'entrée du convertisseur, on définit alors la résolution effective liée au rapport signal sur bruit mesuré en sortie. Cette résolution notée  $N_{SNR}$  est définie par la relation (A.1).

$$SNR(\text{dB}) = 6.02N_{SNR} + 1.76 \quad (\text{A.1})$$

---

Celle-ci peut être approchée sans grande erreur par la relation :

$$SNR(\text{dB}) \simeq 6N_{SNR} \quad (\text{A.2})$$

En plus du bruit, le signal utile est déformé à cause des non-linéarités. On évalue cette déformation en mesurant en sortie le SFDR (spurious-free dynamic range) soit le rapport quadratique entre les amplitudes du signal utile et de la plus grande composante parasite présente dans le spectre de sortie. On définit alors une résolution effective liée aux non-linéarités (notée  $N_{SFDR}$ ) à l'aide de la relation (A.3).

$$SFDR(\text{dBc}) \simeq 6N_{SFDR} \quad (\text{A.3})$$

En fait, les convertisseurs les plus rapides ont les résolutions les plus faibles. On ne peut donc pas les comparer facilement entre eux. C'est pourquoi, on évalue souvent la performance d'un convertisseur analogique/numérique par le produit  $P$ :

$$P = 2^{N_{eff}} f_{ech} \quad (\text{A.4})$$

Pour prendre en compte la consommation, on évalue le facteur de mérite  $F$  :

$$F = P/P_{diss} = \frac{2^{N_{eff}} f_{ech}}{P_{diss}} \quad (\text{A.5})$$

où  $P_{diss}$  est la puissance dissipée.

## Performances actuelles de la conversion analogique/numérique

On distingue les convertisseurs de type Nyquist des convertisseurs à sur-échantillonnage. Les premiers fonctionnent avec une horloge de même cadence que la fréquence d'échantillonnage du signal de sortie. Les seconds nécessitent de recevoir une horloge dont la fréquence soit un multiple de la fréquence d'échantillonnage du signal de sortie. On énumère ici rapidement les principales familles de convertisseurs analogique/numérique disponibles sur le marché et leurs principales caractéristiques.

Les *convertisseurs sigma-delta* sont des convertisseurs permettant une très bonne résolution et une fréquence d'échantillonnage allant jusqu'à quelques Méc/s (par exemple on a 24 bit à 105 Kéc/s pour l'ADS 1271 de Texas Instruments ou 18 bit à 1.25 Méc/s pour l'ADS 1625 de Texas Instruments [81]).

Les *convertisseurs à approximations successives* sont plus rapides mais ont des résolutions plus faibles. Ils ont des résolutions de 8 à 18 bit pour des cadences inférieures à 10 Méc/s.



---

Les *convertisseurs pipeline* travaillent à des fréquences d'échantillonnage de l'ordre de plusieurs dizaines de Méch/s (16 bit à 100 Méch/s pour l'AD9446 de Analog Devices).

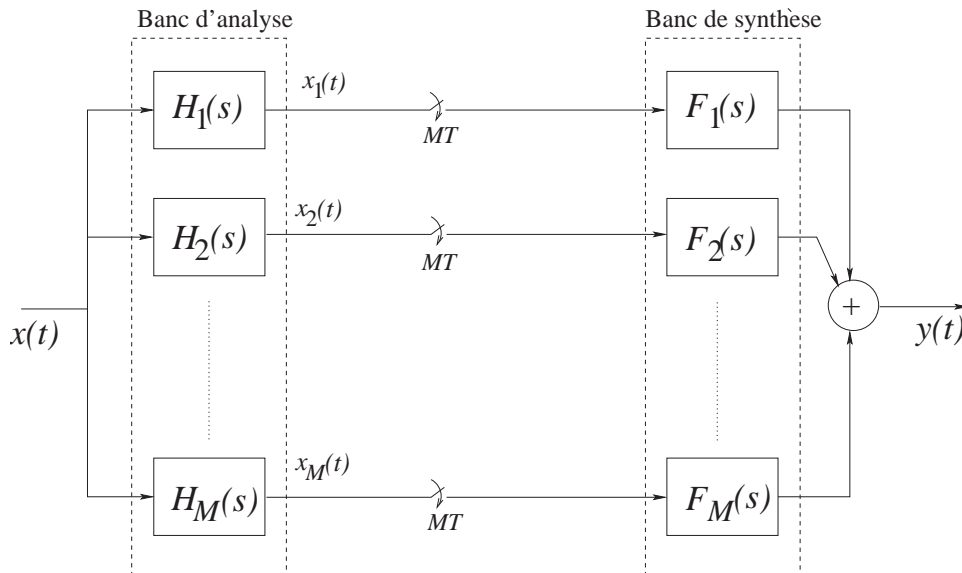
Les *convertisseurs flash* sont très rapides mais leur résolution est limitée par les non-appariements des composants, la dimension et la consommation (8 bit à 1.5 Géch/s pour l'ADC08D1500 de National Semiconductor).

---

## Annexe B

# Calcul des filtres de synthèse pour un BFH à reconstruction parfaite (exemple 1)

On part d'un banc de filtres entièrement analogique (représenté en figure B.1 : les filtres du banc d'analyse sont analogiques et les filtres du banc de synthèse sont également analogiques). On écrit les conditions de reconstruction parfaite pour les



**Fig. B.1** – *Banc de filtres continus*

trois intervalles indiqués dans le Tableau 2.1. Dans chacun de ces trois intervalles il y a seulement deux termes de repliement intervenant dans la somme (2.28). Par consé-

quent les conditions de reconstruction parfaite constituent pour chaque intervalle, un système de trois équations avec trois inconnues :

$$\begin{cases} \frac{1}{MT} (H_1(j\Omega)F_1(j\Omega) + H_2(j\Omega)F_2(j\Omega) + H_3(j\Omega)F_3(j\Omega)) = ce^{-j\Omega d'} \\ \frac{1}{MT} \left( H_1(j\Omega + j\frac{4\pi}{3T})F_1(j\Omega) + H_2(j\Omega + j\frac{4\pi}{3T})F_2(j\Omega) + H_3(j\Omega + j\frac{4\pi}{3T})F_3(j\Omega) \right) = 0 \\ \frac{1}{MT} \left( H_1(j\Omega + j\frac{2\pi}{3T})F_1(j\Omega) + H_2(j\Omega + j\frac{2\pi}{3T})F_2(j\Omega) + H_3(j\Omega + j\frac{2\pi}{3T})F_3(j\Omega) \right) = 0. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

pour  $-\frac{\pi}{T} < \Omega < -\frac{\pi}{3T}$ . Pour  $-\frac{\pi}{3T} < \Omega < \frac{\pi}{3T}$  on a :

$$\begin{cases} \frac{1}{MT} (H_1(j\Omega)F_1(j\Omega) + H_2(j\Omega)F_2(j\Omega) + H_3(j\Omega)F_3(j\Omega)) = ce^{-j\Omega d'} \\ \frac{1}{MT} \left( H_1(j\Omega + j\frac{2\pi}{3T})F_1(j\Omega) + H_2(j\Omega + j\frac{2\pi}{3T})F_2(j\Omega) + H_3(j\Omega + j\frac{2\pi}{3T})F_3(j\Omega) \right) = 0 \\ \frac{1}{MT} \left( H_1(j\Omega - j\frac{2\pi}{3T})F_1(j\Omega) + H_2(j\Omega - j\frac{2\pi}{3T})F_2(j\Omega) + H_3(j\Omega - j\frac{2\pi}{3T})F_3(j\Omega) \right) = 0. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Enfin, pour  $-\frac{\pi}{3T} < \Omega < \frac{\pi}{3T}$  on a :

$$\begin{cases} \frac{1}{MT} (H_1(j\Omega)F_1(j\Omega) + H_2(j\Omega)F_2(j\Omega) + H_3(j\Omega)F_3(j\Omega)) = ce^{-j\Omega d'} \\ \frac{1}{MT} \left( H_1(j\Omega - j\frac{2\pi}{3T})F_1(j\Omega) + H_2(j\Omega - j\frac{2\pi}{3T})F_2(j\Omega) + H_3(j\Omega - j\frac{2\pi}{3T})F_3(j\Omega) \right) = 0 \\ \frac{1}{MT} \left( H_1(j\Omega - j\frac{4\pi}{3T})F_1(j\Omega) + H_2(j\Omega - j\frac{4\pi}{3T})F_2(j\Omega) + H_3(j\Omega - j\frac{4\pi}{3T})F_3(j\Omega) \right) = 0. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Les trois systèmes d'équations (B.1), (B.2) et (B.3) sont pour le cas particulier des filtres donnés par (2.43) en mettant  $s = j\Omega$  :

$$\begin{cases} F_1(j\Omega) + j\Omega F_2(j\Omega) - \Omega^2 F_3(j\Omega) = cMT e^{-j\Omega d'} \\ F_1(j\Omega) + j(\Omega + \frac{4\pi}{3T})F_2(j\Omega) - (\Omega + \frac{4\pi}{3T})^2 F_3(j\Omega) = 0 \\ F_1(j\Omega) + j(\Omega + \frac{2\pi}{3T})F_2(j\Omega) - (\Omega + \frac{2\pi}{3T})^2 F_3(j\Omega) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

pour  $-\frac{\pi}{T} < \Omega < -\frac{\pi}{3T}$ . Pour  $-\frac{\pi}{3T} < \Omega < \frac{\pi}{3T}$  on a :

$$\begin{cases} F_1(j\Omega) + j\Omega F_2(j\Omega) - \Omega^2 F_3(j\Omega) = cMT e^{-j\Omega d'} \\ F_1(j\Omega) + j(\Omega + \frac{2\pi}{3T})F_2(j\Omega) - (\Omega + \frac{2\pi}{3T})^2 F_3(j\Omega) = 0 \\ F_1(j\Omega) + j(\Omega - \frac{2\pi}{3T})F_2(j\Omega) - (\Omega - \frac{2\pi}{3T})^2 F_3(j\Omega) = 0. \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Enfin, pour  $-\frac{\pi}{3T} < \Omega < \frac{\pi}{3T}$  on a :

$$\begin{cases} F_1(j\Omega) + j\Omega F_2(j\Omega) - \Omega^2 F_3(j\Omega) = cMT e^{-j\Omega d'} \\ F_1(j\Omega) + j(\Omega - \frac{2\pi}{3T}) F_2(j\Omega) - (\Omega - \frac{2\pi}{3T})^2 F_3(j\Omega) = 0 \\ F_1(j\Omega) + j(\Omega - \frac{4\pi}{3T}) F_2(j\Omega) - (\Omega - \frac{4\pi}{3T})^2 F_3(j\Omega) = 0. \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Avec les notations  $a = 2\pi/3T$  et  $E = cMT e^{-j\Omega d'}$  les solutions des trois systèmes sont :

$$F_1(j\Omega) = \begin{cases} E \frac{\Omega^2 + 3\Omega a + 2a^2}{2a^2}, & -\frac{\pi}{T} < \Omega < -\frac{\pi}{3T} \\ -E \frac{\Omega^2 - a^2}{a^2}, & -\frac{\pi}{3T} < \Omega < \frac{\pi}{3T} \\ E \frac{\Omega^2 - 3\Omega a + 2a^2}{2a^2}, & \frac{\pi}{3T} < \Omega < \frac{\pi}{T} \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

$$F_2(j\Omega) = \begin{cases} jE \frac{2\Omega + 3a}{2a^2}, & -\frac{\pi}{T} < \Omega < -\frac{\pi}{3T} \\ -jE \frac{2\Omega}{a^2}, & -\frac{\pi}{3T} < \Omega < \frac{\pi}{3T} \\ jE \frac{2\Omega - 3a}{2a^2}, & \frac{\pi}{3T} < \Omega < \frac{\pi}{T} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

$$F_3(j\Omega) = \begin{cases} -E \frac{1}{2a^2}, & -\frac{\pi}{T} < \Omega < -\frac{\pi}{3T} \\ E \frac{1}{a^2}, & -\frac{\pi}{3T} < \Omega < \frac{\pi}{3T} \\ -E \frac{1}{2a^2}, & \frac{\pi}{3T} < \Omega < \frac{\pi}{T} \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Ensuite, on calcule les transformés de Fourier inverses :

$$f_m(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} F_m(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (\text{B.10})$$

pour  $m \in \{1,2,3\}$ . En calculant les intégrales on obtient :

$$\begin{cases} f_1(t) = MTc \frac{\sin \frac{a(t-d')}{2} (24 + 3(t-d')^2 a^2) - \sin \frac{3a(t-d')}{2} (8 + (t-d')^2 a^2)}{8\pi(t-d')^3 a^2} \\ f_2(t) = MTc \frac{3 \sin \frac{a(t-d')}{2} - \sin \frac{3a(t-d')}{2}}{\pi(t-d')^2 a^2} \\ f_3(t) = MTc \frac{3 \sin \frac{a(t-d')}{2} - \sin \frac{3a(t-d')}{2}}{2\pi(t-d') a^2}. \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

Si on choisit les filtres de synthèse comme ci-dessus, la sortie sera :

$$y(t) = cx(t-d). \quad (\text{B.12})$$

Soit  $x_m(kMT)$  le signal de sortie du  $m$ -ième filtre d'analyse, échantillonné, alors  $y_m(t)$ , le signal de sortie du  $m$ -ième filtre de synthèse est :

$$y_m(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_m(kMT) f_m(t - kMT). \quad (\text{B.13})$$

Soit  $x_{mi}(kT)$  défini comme suit :

$$x_{mi}(kT) = \begin{cases} x_m(kT) & k = Mr \\ 0 & k \neq Mr \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

pour  $r \in \mathbb{Z}$ . On définit aussi :

$$y_{mi}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{mi}(kT) f_m(t - kT). \quad (\text{B.15})$$

De la définition (B.14) il résulte directement que :

$$y_{mi}(t) = y_m(t). \quad (\text{B.16})$$

Soit  $f_m(n)$  le filtre numérique qui résulte en échantillonnant la réponse impulsionnelle du  $m$ -ième filtre de synthèse avec la période  $T$  :

$$f_m(n) = f_m(t)|_{t=nT}. \quad (\text{B.17})$$

À la place des filtres de synthèse analogiques on met maintenant les filtres en temps discret définis en (B.17). La sortie du  $m$ -ième filtre sera un signal échantillonné :

$$y_m(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{mi}(kT) f_m(nT - kT). \quad (\text{B.18})$$

On a utilisé  $x_{mi}(kT)$  (qui est un signal en temps discret de cadence  $T$ ) à la place de  $x_m(kMT)$  (qui est un signal en temps discret de cadence  $MT$ ) parce que  $f_m(n)$  est un signal en temps discret de cadence  $T$ . On peut donc remarquer que le signal  $y_m(n)$  en (B.18) est une version échantillonnée du signal  $y_{mi}(t)$  en (B.13). Mais on a vu (B.16) que  $y_{mi}(t) = y_m(t)$ . Donc  $y_m(n)$  est une version échantillonnée du signal  $y_m(t)$ . Tenant compte du fait que :

$$y(t) = \sum_{m=1}^M y_m(t) \quad (\text{B.19})$$

et

$$y(nT) = \sum_{m=1}^M y_m(n) \quad (\text{B.20})$$

on peut affirmer que, si on met à la place des filtres de synthèse à temps continu, leurs versions à temps discret (B.17), la sortie représente le signal  $y(t)$  échantillonné. Le banc de filtres analogique, initial étant à reconstruction parfaite, le banc hybride dérivé sera lui aussi à reconstruction parfaite (dans l'hypothèse que le signal d'entrée est de bande limitée). Donc, on peut obtenir ainsi un banc de filtres hybride à temps continu. Les réponses impulsionnelles des filtres numériques sont donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(n) = Mc \frac{\sin \frac{a'(n-d)}{2} (24 + 3(n-d)^2 a'^2)}{8\pi(n-d)^3 a'^2} \\ f_2(n) = MTc \frac{3 \sin \frac{a'(n-d)}{2}}{\pi(n-d)^2 a'^2} \\ f_3(n) = MT^2c \frac{3 \sin \frac{a'(n-d)}{2}}{2\pi(n-d) a'^2} \end{array} \right. \quad (\text{B.21})$$

où  $a' = 2\pi/3$  et  $d = d'/T$ .

---

## Annexe C

# Calcul du SFDR pour un banc de filtres hybride à temps continu

Les valeurs du *SFDR* pour les cas des structures à entrelacement temporel et pour les BFH à temps discret ont été calculées dans [90]. Dans cette annexe on montre que les valeurs trouvées dans le cas des BFH à temps discret, peuvent aussi s'appliquer pour les BFH à temps continu. Pour calculer le *SFDR* d'un convertisseur analogique/numérique on applique à son entrée un signal sinusoïdal :

$$x(t) = S_0 \cos(2\pi F_0 t). \quad (\text{C.1})$$

En analysant le spectre de sa sortie, on va observer une raie spectrale sur la fréquence du signal d'entrée,  $F_0$  (le signal utile). On va également observer des raies sur d'autres fréquences et du bruit de quantification et provenant d'autres sources. Le *SFDR* se définit ([80], [90]) comme la moyenne quadratique de l'amplitude de la composante sur  $F_0$  sur le maximum des moyennes quadratiques des autres amplitudes des raies parasites. On a vu dans le paragraphe 2.3.1 que, dans le cas d'un BFH à temps continu, le spectre de sa sortie est :

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{p=-(M-1)}^{M-1} X\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right) \hat{T}_p(e^{j\omega}) + \sum_{m=1}^M F_m(e^{j\omega}) B_m(e^{j\omega M}) \quad (\text{C.2})$$

où  $\hat{T}_p(e^{j\omega})$  est :

$$\hat{T}_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M A_m(e^{j\omega M}) F_m(e^{j\omega}) H_m\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right) \quad (\text{C.3})$$

et

$$\omega = \Omega T.$$

Les fonctions  $A_m(e^{j\omega})$  et  $B_m(e^{j\omega})$  sont données par (2.45) et (2.49) et modélisent les erreurs de gain, de phase et de décalage. Comme  $a_m(n)$  sont numériques, leurs transformées de Fourier sont périodiques en pulsation, de période  $2\pi/MT$ , ou, en pulsation normalisée,  $2\pi$ . Alors, on peut écrire la relation (2.45) :

$$A_m(e^{j\omega}) = \mathcal{TF}\{a_m(n)\} = (1 + \tilde{a}_m)e^{-j(\omega \bmod 2\pi)d_m} \quad (\text{C.4})$$

où  $\tilde{a}_m$  est l'erreur de gain sur la branche  $m$  et  $d_m$  représente l'erreur de phase. L'utilisation de la fonction modulo en (C.4) est faite pour mettre en évidence la périodicité de la fonction de transfert  $A_m(e^{j\omega})$  avec la période  $2\pi$ . Cette mise en évidence de la périodicité de la fonction  $A_m(e^{j\omega})$  est nécessaire pour des développements ultérieurs.

## C.1 Erreurs de gain et de phase

On considère d'abord que les erreurs de décalage sont nulles et on s'intéresse aux erreurs de gain et de phase. En regardant l'équation (C.2) il est clair que, en dehors du signal sur  $f_0$ , la sortie aura des signaux sur les pulsations de repliement  $\pm 2\pi f_0 + \frac{2\pi p}{M}$ , où  $f_0 = F_0 T$  et  $p \in \{-(M-1), \dots, M-1\} \setminus \{0\}$ . La transformée de Fourier du signal d'entrée étant :

$$X(j\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = S_0\pi [\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)] \quad (\text{C.5})$$

la transformée de Fourier de la sortie sera :

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{p=-(M-1)}^{M-1} S_0\pi \left[ \delta(\Omega - \Omega_0 + \frac{2\pi p}{MT}) + \delta(\Omega + \Omega_0 + \frac{2\pi p}{MT}) \right] \hat{T}_p(e^{j\omega}). \quad (\text{C.6})$$

Donc, le spectre de sortie est composé d'une raie utile sur la fréquence normalisée  $f_0$  (le terme pour  $p = 0$ ) et des raies parasites sur les pulsations normalisées

$$\omega_p = \pm 2\pi f_0 + \frac{2\pi p}{M} \quad (\text{C.7})$$

pour  $p \in \{-(M-1), \dots, M-1\} \setminus \{0\}$ . Alors, tenant compte de la définition du  $SFDR$ , on peut écrire :

$$SFDR = \frac{\mathbb{E} \left\{ \left| \hat{T}_0(e^{j\omega}) \right|_{\omega=\omega_0}^2 \right\}}{\max_{\omega_p} \left\{ \mathbb{E} \left\{ \left| \hat{T}_p(e^{j\omega}) \right|_{\omega=\omega_p}^2 \right\} \right\} \Big|_{p \in \{-(M-1), \dots, M-1\} \setminus \{0\}}}. \quad (\text{C.8})$$



On calcule tout d'abord  $E \left\{ \left| \hat{T}_p(e^{j\omega}) \right|^2 \right\}$ :

$$\begin{aligned} E \left\{ \left| \hat{T}_p(e^{j\omega}) \right|^2 \right\} &= \\ &= E \left\{ \frac{1}{M^2} \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^M \left[ H_k \left( j \left( \Omega - \frac{2\pi p}{MT} \right) \right) H_m^* \left( j \left( \Omega - \frac{2\pi p}{MT} \right) \right) F_k(e^{j\omega}) F_m^*(e^{j\omega}) A_k(e^{j\omega M}) A_m^*(e^{j\omega M}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (C.9)$$

Avec l'équation (C.4) on a :

$$\begin{aligned} E \left\{ \left| \hat{T}_p(e^{j\omega}) \right|^2 \right\} &= \\ &= \frac{1}{M^2} \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^M \left[ H_k \left( j \left( \Omega - \frac{2\pi p}{MT} \right) \right) H_m^* \left( j \left( \Omega - \frac{2\pi p}{MT} \right) \right) F_k(e^{j\omega}) F_m^*(e^{j\omega}) \right. \\ &\quad \cdot (1 + E\{\tilde{a}_k\} + E\{\tilde{a}_m^*\} + E\{\tilde{a}_k \tilde{a}_m^*\}) E \left\{ e^{j(\omega M \bmod 2\pi)(d_m - d_k)} \right\} \left. \right]. \end{aligned} \quad (C.10)$$

Mais les erreurs de gain sur les voies sont supposées aléatoires de moyenne nulle et variance  $E\{\tilde{a}^2\}$ , indépendantes et identiquement distribuées. Cette supposition est vraie surtout dans le cas des technologies des composants discrets. Pour les circuits intégrés, cette supposition n'est plus vraie mais, pour avoir une idée de l'influence des BFH sur les erreurs d'appariement on va accepter cette approximation. Dans ce cas, l'équation (C.10) devient :

$$\begin{aligned} E \left\{ \left| \hat{T}_p(e^{j\omega}) \right|^2 \right\} &= \\ &= \frac{1}{M^2} \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^M H_k \left( j \left( \Omega - \frac{2\pi p}{MT} \right) \right) H_m^* \left( j \left( \Omega - \frac{2\pi p}{MT} \right) \right) F_k(e^{j\omega}) F_m^*(e^{j\omega}) \\ &\quad \cdot (1 + E\{\tilde{a}_k \tilde{a}_m^*\}) E \left\{ e^{j(\omega M \bmod 2\pi)(d_m - d_k)} \right\}. \end{aligned} \quad (C.11)$$

On peut mettre (C.11) sous la forme :

$$\begin{aligned} E \left\{ \left| \hat{T}_p(e^{j\omega}) \right|^2 \right\} &= \frac{1}{M^2} \sum_{m=1}^M (1 + E\{\tilde{a}^2\}) |F_m(e^{j\omega})|^2 \left| H_m \left( j \left( \Omega - \frac{2\pi p}{MT} \right) \right) \right|^2 + \\ &+ \frac{1}{M^2} \sum_{m=1}^M \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^M H_k \left( j \left( \Omega - \frac{2\pi p}{MT} \right) \right) H_m^* \left( j \left( \Omega - \frac{2\pi p}{MT} \right) \right) F_k(e^{j\omega}) F_m^*(e^{j\omega}) E \left\{ e^{j(\omega M \bmod 2\pi)(d_m - d_k)} \right\} \end{aligned} \quad (C.12)$$

Il est facile à montrer que  $E \left\{ e^{j(\omega M \bmod 2\pi)(d_m - d_k)} \right\}$  ne dépend pas de  $m$  et  $k$  parce que les variables  $d_m$ ,  $m \in \{1, \dots, M\}$  sont identiquement distribuées. Donc on peut le sortir en facteur commun. Comme  $E \left\{ \left| \hat{T}_p(e^{j\omega}) \right|^2 \right\}$  est un réel et on va voir que

$\sum_{m=1}^M \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^M H_k\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right) H_m^*\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right) F_k(e^{j\omega}) F_m^*(e^{j\omega})$  est aussi un nombre réel,

on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \left| \hat{T}_p(e^{j\omega}) \right|^2 \right\} &= \frac{1}{M^2} \sum_{m=1}^M (1 + \mathbb{E}\{\tilde{a}^2\}) |F_m(e^{j\omega})|^2 \left| H_m\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right) \right|^2 + \\ &+ \frac{1}{M^2} \mathbb{E} \{ \cos((\omega M \bmod 2\pi)(d_m - d_k)) \} \cdot \\ &\cdot \sum_{m=1}^M \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^M H_k\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right) H_m^*\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right) F_k(e^{j\omega}) F_m^*(e^{j\omega}). \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Mais, pour  $v \ll 1$ , en développant  $\cos v$  en série de McLaurin et en gardant les deux premiers termes, on a :

$$\cos v = 1 - \frac{v^2}{2}. \quad (\text{C.14})$$

Mais les erreurs de phase sont supposées aléatoire de moyenne nulle et de variance  $\mathbb{E}\{d^2\}$ . Par ailleurs elles sont indépendantes et identiquement distribuées (dans une première approximation). Comme  $d_m$  sont petits, on peut écrire  $\omega M(d_m - d_k) \ll 1$  et l'expression (C.13) devient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \left| \hat{T}_p(e^{j\omega}) \right|^2 \right\} &= \frac{1}{M^2} \sum_{m=1}^M (1 + \mathbb{E}\{\tilde{a}^2\}) |F_m(e^{j\omega})|^2 \left| H_m\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right) \right|^2 + \\ &+ \underbrace{\frac{1}{M^2} \sum_{m=1}^M \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^M H_k\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right) H_m^*\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right) F_k(e^{j\omega}) F_m^*(e^{j\omega})}_{D} \cdot \\ &\cdot (1 - (\omega M \bmod 2\pi)^2 \mathbb{E}\{d^2\}). \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Pour calculer le terme noté avec  $D$  dans l'équation (C.15) on part de l'expression qui donne les fonctions de repliement et de distorsion(2.27) et on calcule  $|T_p(e^{j\omega})|^2$  :

$$|T_p(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{M^2} \sum_{m=1}^M \left| H_m\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right) \right|^2 |F_m(e^{j\omega})|^2 + D. \quad (\text{C.16})$$

Le BFH considéré sans les imperfections est supposé avoir la propriété de reconstruction parfaite. Donc, utilisant l'équation (2.35) on peut écrire :

$$|T_p(e^{j\omega})|^2 = \begin{cases} c^2, & p = 0 \\ 0, & p \in \{-(M-1), \dots, M-1\} \setminus \{0\}. \end{cases} \quad (\text{C.17})$$

Enfin, en utilisant les équations (C.16) et (C.17), on peut écrire l'équation (C.15) pour les différentes valeurs de  $p$  comme suit :

- Pour  $p \in \{-(M-1), \dots, M-1\} \setminus \{0\}$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \left| \hat{T}_p(e^{j\omega}) \right|^2 \right\} &= \\ &= \frac{1}{M^2} ((\omega M \bmod 2\pi)^2 \mathbb{E}\{d^2\} + \mathbb{E}\{\tilde{a}^2\}) \sum_{m=1}^M |F_m(e^{j\omega})|^2 \left| H_m \left( j \left( \Omega - \frac{2\pi p}{MT} \right) \right) \right|^2. \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

- Pour  $p = 0$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \left| \hat{T}_0(e^{j\omega}) \right|^2 \right\} &= \frac{1}{M^2} (1 + \mathbb{E}\{\tilde{a}^2\}) \sum_{m=1}^M |F_m(e^{j\omega})|^2 |H_m(j\Omega)|^2 + \\ &+ (1 - (\omega M \bmod 2\pi)^2 \mathbb{E}\{d^2\}) \left( c^2 - \frac{1}{M^2} \sum_{m=1}^M |H_m(j\Omega)|^2 |F_m(e^{j\omega})|^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

En général on considère un BFH pour lequel, s'il n'y a pas d'erreurs de distorsion et de repliement, la sortie est l'entrée échantillonnée et retardée. Donc on va considérer par la suite  $c = 1$ . Comme les variances des erreurs de gain et de décalage sont très petites :

$$\mathbb{E}\{\tilde{a}^2\} \ll 1$$

$$(\omega M \bmod 2\pi)^2 \mathbb{E}\{d^2\} \ll 1$$

on a :

$$\mathbb{E} \left\{ \left| \hat{T}_0(e^{j\omega}) \right|^2 \right\} \simeq 1. \quad (\text{C.20})$$

Pour pouvoir calculer les valeurs du  $SFDR$  pour le cas d'un BFH à temps continu, quelques hypothèses sont nécessaires en ce qui concerne les caractéristiques d'amplitude des filtres. On suppose donc que le module des filtres a la forme suivante :

$$|H_m(j\Omega)| = \begin{cases} \sqrt{M}, & |\Omega| \in \left( \frac{(m-1)\pi}{MT} + \epsilon, \frac{m\pi}{MT} - \epsilon \right) \\ \text{BT} & , |\Omega| \in \left( \underbrace{\frac{(m-1)\pi}{MT} - \epsilon}_{\Omega_{\min}(m)}, \underbrace{\frac{(m-1)\pi}{MT} + \epsilon}_{\Omega_{\max}(m)} \right) \cup \left( \frac{m\pi}{MT} - \epsilon, \frac{m\pi}{MT} + \epsilon \right) \\ h' & , \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.21})$$

$$|F_m(e^{j\omega})| = \begin{cases} \sqrt{M}, \frac{|\omega|}{T} \in \left( \frac{(m-1)\pi}{MT} + \epsilon, \frac{m\pi}{MT} - \epsilon \right) \\ \text{BT}, \frac{|\omega|}{T} \in \left( \frac{(m-1)\pi}{MT} - \epsilon, \frac{(m-1)\pi}{MT} + \epsilon \right) \cup \left( \frac{m\pi}{MT} - \epsilon, \frac{m\pi}{MT} + \epsilon \right) \\ h', \text{ sinon} \end{cases} \quad (\text{C.22})$$

pour  $m \in \{2, \dots, M\}$  et pour  $m = 1$  :

$$|H_1(j\Omega)| = \begin{cases} \sqrt{M}, |\Omega| \in \left( 0, \frac{\pi}{MT} - \epsilon \right) \\ \text{BT}, |\Omega| \in \left( \frac{\pi}{MT} - \epsilon, \frac{\pi}{MT} + \epsilon \right) \\ h', \text{ sinon} \end{cases} \quad (\text{C.23})$$

$$|F_1(e^{j\omega})| = \begin{cases} \sqrt{M}, \frac{|\omega|}{T} \in \left( 0, \frac{\pi}{MT} - \epsilon \right) \\ \text{BT}, \frac{|\omega|}{T} \in \left( \frac{\pi}{MT} - \epsilon, \frac{\pi}{MT} + \epsilon \right) \\ h', \text{ sinon.} \end{cases} \quad (\text{C.24})$$

Dans les équations (C.21), (C.22), (C.23) et (C.24) « BT » symbolise la bande de transition dans laquelle, le module des filtres diminue de la valeur dans la bande passante jusqu'à la valeur en bande coupée. On considère que  $\epsilon \ll \frac{\pi}{MT}$ .  $h'$  est l'atténuation dans la bande coupée. On suppose qu'au milieu des bandes de transition se trouvent les fréquences de coupure (3 dB) :

$$\left| H_m(j \frac{m\pi}{MT}) \right| = \left| H_m(j \frac{(m-1)\pi}{MT}) \right| = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2}} \quad (\text{C.25})$$

$$\left| F_m(j \frac{m\pi}{M}) \right| = \left| F_m(j \frac{(m-1)\pi}{M}) \right| = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2}} \quad (\text{C.26})$$

pour  $m \in \{2, \dots, M\}$ .

Avec ces hypothèses concernant les caractéristiques d'amplitude des filtres on peut calculer le *SFDR* dans le cas du BFH à temps continu affecté par les erreurs des convertisseurs de branche.

## Erreurs de gain

Maintenant, on considère qu'il y a uniquement les erreurs de gain (les erreurs de phase et de décalage sont nulles -  $E\{d^2\} = E\{b^2\} = 0$ ). Alors, l'équation (C.18) devient :

$$E \left\{ \left| \hat{T}_p(e^{j\omega}) \right|^2 \right\} = \frac{1}{M^2} E\{\tilde{a}^2\} \sum_{m=1}^M |F_m(e^{j\omega})|^2 \left| H_m \left( j \left( \Omega - \frac{2\pi p}{MT} \right) \right) \right|^2. \quad (\text{C.27})$$

On a vu en (C.8) que, pour calculer le *SFDR*, on doit estimer  $E \left\{ \left| \hat{T}_p(e^{j\omega}) \right|^2 \right\}$  aux pulsations parasites  $\omega_p$ . Si une des fréquences parasites se trouve dans une des bandes de transition, le *SFDR* est minimum, parce que l'atténuation des filtres est faible. En effet, si par exemple  $\omega_p = \frac{k\pi}{M}$  pour un certain  $k \in \{-(M-1), \dots, M-1\} \setminus \{0\}$  :

$$E \left\{ \left| \hat{T}_p(e^{j\frac{k\pi}{M}}) \right|^2 \right\} = \frac{1}{M^2} E\{\tilde{a}^2\} \sum_{m=1}^M |F_m(e^{j\frac{k\pi}{M}})|^2 \left| H_m \left( j \left( \frac{k\pi}{MT} - \frac{2\pi p}{MT} \right) \right) \right|^2. \quad (C.28)$$

On étudie maintenant la somme en (C.28). Pour voir les termes qui ont des contributions non-négligeables, on suppose que  $h' = 0$ .  $|F_m(e^{j\frac{k\pi}{M}})|^2$  est différent de zéro si  $m = |k|$  ou  $m = |k| + 1$ . En réalité,  $h' \neq 0$ , mais si on choisit les filtres telles que  $h'$  soit très petit, les autres termes vont être très petits par rapport aux termes  $m = |k|$  ou  $m = |k| + 1$ . Alors, on va limiter notre analyse à seuls ces deux termes. Donc, on peut écrire :

$$\begin{aligned} E \left\{ \left| \hat{T}_p(e^{j\frac{k\pi}{M}}) \right|^2 \right\} &= \\ &= \frac{1}{M^2} E\{\tilde{a}^2\} \left( |F_{|k|}(e^{j\frac{k\pi}{M}})|^2 \left| H_{|k|} \left( j \left( \frac{k\pi}{MT} - \frac{2\pi p}{MT} \right) \right) \right|^2 + \right. \\ &\quad \left. + |F_{|k|+1}(e^{j\frac{k\pi}{M}})|^2 \left| H_{|k|+1} \left( j \left( \frac{k\pi}{MT} - \frac{2\pi p}{MT} \right) \right) \right|^2 \right). \end{aligned} \quad (C.29)$$

Pour que la somme en (C.29) soit différente de zéro, il faut qu'au moins un des termes  $\left| H_{|k|} \left( j \left( \frac{k\pi}{MT} - \frac{2\pi p}{MT} \right) \right) \right|$  et  $\left| H_{|k|+1} \left( j \left( \frac{k\pi}{MT} - \frac{2\pi p}{MT} \right) \right) \right|$  soit différent de zéro. Ceci arrive quand :

$$\begin{cases} -\Omega_{Max}(|k|) < \frac{k-2p}{MT}\pi < -\Omega_{min}(|k|) \\ \text{ou} \\ -\Omega_{Max}(|k|+1) < \frac{k-2p}{MT}\pi < -\Omega_{min}(|k|+1) \end{cases} \quad (C.30)$$

pour  $k > 1$ , ou :

$$\begin{cases} \Omega_{min}(|k|) < \frac{k-2p}{MT}\pi < \Omega_{Max}(|k|) \\ \text{ou} \\ \Omega_{min}(|k|+1) < \frac{k-2p}{MT}\pi < \Omega_{Max}(|k|+1) \end{cases} \quad (C.31)$$

pour  $k < -1$ . Mais on a supposé que  $\frac{MT}{\pi}\epsilon \ll 1$ , donc la seule solution possible est  $p = k$ .

Pour  $k = 1$ ,  $|F_1(e^{j\frac{\pi}{M}})|^2$  et  $|F_2(e^{j\frac{\pi}{M}})|^2$  sont différentes de zéro et  $\left|H_1\left(j\left(\frac{\pi}{MT} - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right)\right|$  et  $\left|H_2\left(j\left(\frac{\pi}{MT} - \frac{2\pi p}{MT}\right)\right)\right|$  sont différentes de zéros si  $p = 1$ . Et, de la même manière, pour  $k = -1$  on doit avoir  $p = -1$ .

Donc, si la pulsation du signal de repliement est  $\omega_p = \frac{k\pi}{M}$  pour un certain  $k \in \{-(M-1), \dots, M-1\} \setminus \{0\}$ ,  $\left|\hat{T}_p(e^{j\frac{k\pi}{M}})\right|^2$  aura deux termes différents de zéro si  $p = k$ . Ces termes correspondent à  $m = |k|$  et  $m = |k| + 1$ . On peut aussi remarquer que si  $\omega_p = \frac{k\pi}{M}$  est la pulsation d'un signal de repliement il y aura aussi une raie spectrale sur  $\omega_p = -\frac{k\pi}{M}$ . Donc  $\left|\hat{T}_k(e^{j\frac{k\pi}{M}})\right|^2$  mais aussi  $\left|\hat{T}_{-k}(e^{j\frac{k\pi}{M}})\right|^2$  auront deux termes différents de zéro. On peut écrire (C.29) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \left| \hat{T}_k(e^{j\frac{k\pi}{M}}) \right|^2 \right\} &= \\ &= \frac{1}{M^2} \mathbb{E}\{\tilde{a}^2\} \left( |F_{|k|}(e^{j\frac{k\pi}{M}})|^2 \left| H_{|k|}\left(j\left(\frac{k\pi}{MT} - \frac{2\pi k}{MT}\right)\right) \right|^2 + \right. \\ &\quad \left. + |F_{|k|+1}(e^{j\frac{k\pi}{M}})|^2 \left| H_{|k|+1}\left(j\left(\frac{k\pi}{MT} - \frac{2\pi k}{MT}\right)\right) \right|^2 \right) = \\ &= \frac{1}{M^2} \mathbb{E}\{\tilde{a}^2\} 2 \left( \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2}} \right)^2 \left( \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2}} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

On peut finalement écrire les erreurs maximales de gain pour un BFH à temps continu :

$$\mathbb{E} \left\{ \left| \hat{T}_k(e^{j\frac{k\pi}{M}}) \right|^2 \right\} = \frac{\mathbb{E}\{\tilde{a}^2\}}{2}. \quad (\text{C.33})$$

Utilisant les expressions (C.8), (C.20) et (C.33) on trouve le *SFDR* minimum pour un BFH affecté par des erreurs de gain dans les convertisseurs analogique/numérique de branche:

$$SFDR_{\text{BFHmin}} = \frac{2}{\mathbb{E}\{\tilde{a}^2\}}. \quad (\text{C.34})$$

Comme on a vu, il est déduit dans la situation la plus défavorable, quand un des signaux de repliement tombe dans une bande de transition des filtres composant le banc. Une situation plus probable arrive quand la fréquence du signal de repliement est située dans une des bandes passantes des filtres du banc :

$$\frac{\omega_p}{T} \in \left( \frac{(k-1)\pi}{MT} + \epsilon, \frac{k\pi}{MT} - \epsilon \right) \quad (\text{C.35})$$

pour  $k \in \{1, \dots, M\}$ . On écrit alors :

$$\begin{aligned} E \left\{ \left| \hat{T}_p(e^{j\omega}) \right|^2 \right\} &= \frac{1}{M^2} E\{\tilde{a}^2\} \sum_{m=1}^M |F_m(e^{j\omega_p})|^2 \left| H_m \left( j \left( \frac{\omega_p}{T} - \frac{2\pi p}{MT} \right) \right) \right|^2 \\ &= \frac{1}{M^2} E\{\tilde{a}^2\} \left( |F_k(e^{j\omega_p})|^2 \left| H_k \left( j \left( \frac{\omega_p}{T} - \frac{2\pi p}{MT} \right) \right) \right|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^M |F_m(e^{j\omega_p})|^2 \left| H_m \left( j \left( \frac{\omega_p}{T} - \frac{2\pi p}{MT} \right) \right) \right|^2 \right) \end{aligned} \quad (C.36)$$

pour  $p \in \{-(M-1), \dots, M-1\} \setminus \{0\}$ . Tenant compte du fait que  $p \neq 0$  on peut écrire le premier terme de la dernière somme dans l'équation ci-dessus :

$$|F_k(e^{j\omega_p})|^2 \left| H_k \left( j \left( \frac{\omega_p}{T} - \frac{2\pi p}{MT} \right) \right) \right|^2 = Mh'^2. \quad (C.37)$$

Pour calculer le reste de la somme, on remarque que si  $\frac{\omega_p}{T}$  est dans l'une des bandes passantes des filtres,  $\Omega_0 = 2\pi F_0$  est aussi dans l'une des bandes passantes des filtres. Et comme

$$\frac{\omega_p}{T} - \frac{2\pi p}{MT} = \pm \Omega_0 \quad (C.38)$$

il existe un unique  $m \in \{1, \dots, M\}$ ,  $m \neq k$  pour lequel :

$$\left| H_m \left( j \left( \frac{\omega_p}{T} - \frac{2\pi p}{MT} \right) \right) \right| = |H_m(\pm j\Omega_0)| = \sqrt{M}.$$

Pour cette valeur de  $m$ , on a :

$$|F_m(e^{j\omega_p})| = h'$$

puisque  $m \neq k$ . On peut donc écrire :

$$E \left\{ \left| \hat{T}_p(e^{j\omega}) \right|^2 \right\} = \frac{1}{M^2} E\{\tilde{a}^2\} 2Mh'^2 = 2E\{\tilde{a}^2\} h^2 \quad (C.39)$$

où  $h$  est défini comme le rapport entre l'atténuation dans la bande coupée et l'atténuation dans la bande passante pour les deux cas (le cas des filtres d'analyse et le cas des filtres de synthèse) :

$$h = \frac{h'}{\sqrt{M}}. \quad (C.40)$$

Alors, tenant compte des équations (C.20), (C.39) et (C.8) on peut calculer le *SFDR* typique pour un BFH à temps continu en présence des erreurs de gain sur les convertisseurs analogique/numérique de branche :

$$SFDR_{\text{BFHtypique}} = \frac{1}{2E\{\tilde{a}^2\} h^2}. \quad (C.41)$$

Plus l'atténuation des filtres est grande, plus  $p$  est petit, donc le  $SFDR$  prend de bonnes valeurs.

Pour un CAN réalisé avec une structure à entrelacement temporel, le  $SFDR$  est [90] :

$$SFDR_{\text{ET}} = \frac{M}{E\{\tilde{a}^2\}}. \quad (\text{C.42})$$

### Erreurs de phase

Maintenant on considère que les erreurs de gain et de décalage sont nulles et on a uniquement les erreurs de phase  $E\{\tilde{a}^2\} = E\{b^2\} = 0$  :

$$\begin{aligned} E \left\{ \left| \hat{T}_p(e^{j\omega}) \right|^2 \right\} &= \\ &= \frac{1}{M^2} (\omega M \bmod 2\pi)^2 E\{d^2\} \sum_{m=1}^M |F_m(e^{j\omega})|^2 \left| H_m \left( j \left( \Omega - \frac{2\pi p}{MT} \right) \right) \right|^2. \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

Comme on l'a vu dans le paragraphe précédent, le terme  $|F_m(e^{j\omega})|^2 \left| H_m \left( j \left( \Omega - \frac{2\pi p}{MT} \right) \right) \right|^2$  prend ses plus grandes valeurs dans les bandes de transition des filtres. Donc, si un des signaux de repliement « tombe » dans une de ces bandes ( $\omega_p = \frac{k\pi}{M}$  et que, de plus,  $k$  est impaire auquel cas  $\omega M \bmod 2\pi$  prend sa valeur maximale ( $\pi$ )) le  $SFDR$  prend sa valeur minimale. Avec un calcul similaire que dans le paragraphe précédent et tenant compte de (C.43) on obtient :

$$E \left\{ \left| \hat{T}_k(e^{j\frac{k\pi}{M}}) \right|^2 \right\} = \frac{1}{M^2} E\{d^2\} \pi^2 2 \left( \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2}} \right)^2 \left( \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \pi^2 E\{d^2\}. \quad (\text{C.44})$$

À l'aide des équations (C.8), (C.20) et (C.44) on trouve l'expression du  $SFDR$  minimum dans le cas d'un BFH affecté par les erreurs de phase des convertisseurs analogique/numérique de branche :

$$SFDR_{\text{BFHmin}} = \frac{2}{\pi^2 E\{d^2\}}. \quad (\text{C.45})$$

Dans les mêmes conditions, le  $SFDR$  pour un CAN à entrelacement temporel est [90] :

$$SFDR_{\text{ETmin}} = \frac{M}{\pi^2 E\{d^2\}}. \quad (\text{C.46})$$



De nouveau, une situation plus probable est quand les signaux parasites de repliement ne « tombent » pas dans les bandes de transition des filtres mais dans les bandes passantes. Par exemple, si les pulsations des signaux parasites sont de type  $\omega_p = \frac{(2k+1)\pi}{2M}$  avec  $|k| < \frac{2M-1}{2}$ , après un calcul similaire que celui du paragraphe précédent on trouve :

$$\mathbb{E} \left\{ \left| \hat{T}_p(e^{j\frac{k\pi}{M}}) \right|^2 \right\} = \frac{1}{M^2} \mathbb{E}\{d^2\} \frac{\pi^2}{4} 2M^2 h^2 = \mathbb{E}\{d^2\} \frac{\pi^2}{2} h^2. \quad (\text{C.47})$$

Et, considérant les équations (C.8), (C.20) et (C.47), on obtient la valeur typique du  $SFDR$  dans le cas d'un BFH affecté par les erreurs de phase des convertisseurs analogique/numérique de branche :

$$SFDR_{\text{BFHtypique}} = \frac{2}{h^2 \pi^2 \mathbb{E}\{d^2\}}. \quad (\text{C.48})$$

De nouveau on peut remarquer que, tenant compte que  $h$  est le rapport entre l'atténuation des filtres dans la bande coupée et l'atténuation des filtres dans la bande passante, plus l'atténuation des filtres est grande, la valeur typique du  $SFDR$  est meilleure.

La valeur typique pour un système à entrelacement temporel, obtenue dans les mêmes conditions (c'est-à-dire les pulsations des signaux parasites sont de type  $\omega_p = \frac{(2k+1)\pi}{2M}$  avec  $|k| < \frac{2M-1}{2}$ ) est [90] :

$$SFDR_{\text{ETtypique}} = \frac{4M}{\pi^2 \mathbb{E}\{d^2\}}. \quad (\text{C.49})$$

## C.2 Erreurs de décalage

Dans cette section on ne va considérer que les erreurs de décalage -  $\mathbb{E}\{\tilde{a}^2\} = \mathbb{E}\{d^2\} = 0$ . On considère par ailleurs que le banc de filtres est à reconstruction parfaite, donc les fonctions de repliement  $T_p(e^{j\omega})$  pour  $p \neq 0$  sont nulles. Dans ces conditions, l'équation (2.53) devient :

$$Y(e^{j\omega}) = X(j\Omega) T_0(e^{j\omega}) + \sum_{m=1}^M F_m(e^{j\omega}) B_m(e^{j\omega M}). \quad (\text{C.50})$$

Avec l'équation (2.48) on a :

$$Y(e^{j\omega}) = X(j\Omega) T_0(e^{j\omega}) + \sum_{m=1}^M F_m(e^{j\omega}) \frac{2\pi}{MT} b_m \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}). \quad (\text{C.51})$$

Donc, il y aura des raies parasites sur les pulsations  $\Omega_{pCC} = \frac{2\pi p}{MT}$ , pour  $p \in \left\{ -\left\lfloor \frac{M}{2} + 1 \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{M}{2} - 1 \right\rfloor \right\}$ . Pour calculer le  $SFDR$  on doit évaluer :

$$\mathbb{E} \left\{ \left| \sum_{m=1}^M F_m(e^{j\omega}) B_m(e^{j\omega M}) \right|^2 \right\} = \frac{4\pi^2}{(MT)^2} \mathbb{E}\{b^2\} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^M |F_m(e^{j\omega})|^2 \delta\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right). \quad (\text{C.52})$$

On a supposé les erreurs de décalage aléatoires, indépendantes et identiquement distribuées. En évaluant la quantité ci-dessus à une pulsation particulière,  $\Omega = \Omega_{pCC}$  on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \left| \sum_{m=1}^M F_m(e^{j\omega}) B_m(e^{j\omega M}) \right|^2 \right\} &= \frac{4\pi^2}{(MT)^2} \mathbb{E}\{b^2\} \left[ \left( \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] \delta\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right) = \\ &= \frac{4\pi^2}{MT^2} \mathbb{E}\{b^2\} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi p}{MT}\right). \end{aligned} \quad (\text{C.53})$$

On suppose que la constante  $c = 1$  dans les conditions de reconstruction parfaite (2.35) et que l'amplitude du signal d'entrée en (C.1) est  $S_0 = \frac{1}{\sqrt{M}}$  pour que l'amplitude de la sinusoïde soit 1 à l'entrée des convertisseurs analogique/numérique. Le spectre du signal d'entrée est donné en (C.5). Le  $SFDR$  est défini en (A.3) comme le rapport entre la moyenne quadratique de l'amplitude du signal sur  $F_0$  et la moyenne quadratique des amplitudes des signaux sur des fréquences parasites. Donc on peut écrire à partir de (C.5), (C.53) :

$$SFDR_{\text{BFH}} = \frac{\left( \frac{\pi}{\sqrt{MT}} \right)^2}{\frac{4\pi^2}{MT^2} \mathbb{E}\{b^2\}}. \quad (\text{C.54})$$

Donc le  $SFDR$  pour un BFH à temps continu contenant des convertisseurs analogique/numérique de branche affectés par des erreurs de décalage est :

$$SFDR_{\text{BFH}} = \frac{1}{4\mathbb{E}\{b^2\}}. \quad (\text{C.55})$$

On remarque donc, que le  $SFDR$  dans ce cas est constant par rapport au nombre de voies ou à l'atténuation des filtres.

Pour un CAN implémenté en structure à entrelacement temporel, le  $SFDR$  est [90] :

$$SFDR_{\text{ET}} = \frac{M}{4\mathbb{E}\{b^2\}}. \quad (\text{C.56})$$

---

## Annexe D

# Caractéristiques des bancs d'analyse utilisés pour les simulations

Cette annexe décrit pourquoi et comment ont été choisis les filtres d'analyse. Chaque banc d'analyse est composé de résonateurs avec éventuellement un filtre passe-bas du premier ordre. Pour chacun, on donne les caractéristiques des filtres à savoir leur nombre ( $M$ ), leur facteur de qualité ou leur largeur de bande et la règle qui permet d'obtenir leur fréquence de résonance. On représente le module des fonctions de transfert dans la bande utile.

Rappelons la fonction de transfert retenue pour modéliser les résonateurs :

$$H_m(s) = \frac{\frac{\Omega_m}{Q_m}s}{s^2 + \frac{\Omega_m}{Q_m}s + \Omega_m^2} \quad (\text{D.1})$$

où  $\Omega_m$  est la pulsation de résonance du résonateur et  $Q_m$  son facteur de qualité (ou coefficient de surtension). Pour les filtres passe-bas, le fonction de transfert est :

$$H_1(s) = \frac{\Omega_1}{s + \Omega_1} \quad (\text{D.2})$$

*Remarque : Les signaux et les coefficients des filtres étant réels, on ne considère que les fréquences positives. De plus, on utilise dans la suite les pulsations normalisées par rapport à la fréquence d'échantillonnage du signal de sortie du BFH, soit  $\omega = \Omega T$ .*

De manière générale, selon le principe des BFHs, le rôle des filtres d'analyse est d'effectuer une décomposition fréquentielle du signal. Pour cela, nous définissons le

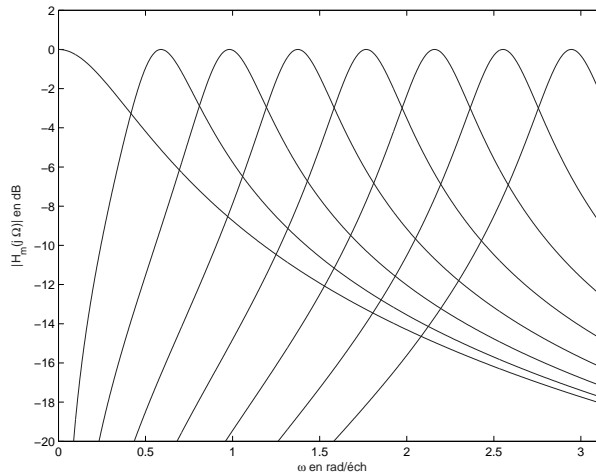
module global du banc d'analyse comme  $\max_m |H_m(j\Omega)|$ . Il faudrait intuitivement que l'ondulation de ce module soit minimale. Ceci va en faveur d'une répartition linéaire des filtres quand ceux-ci ont une largeur fréquentielle constante ou logarithmique quand ceux-ci ont un facteur de qualité constant. De plus, les filtres analogiques offrent un rapport signal sur bruit limité. Par conséquent, l'optimisation du rapport signal sur bruit en sortie du banc d'analyse va dans le sens d'une répartition linéaire (ou logarithmique selon le cas) des fréquences centrales.

### Caractéristiques du banc d'analyse « Banc1 »

Le premier banc d'analyse « Banc1 » est un banc à 8 voies de type passe-bas, donc couvrant la bande normalisée  $[0, \pi]$ . Ce banc est constitué de sept résonateurs et d'un filtre passe-bas du premier ordre pour recouvrir les fréquences proches de 0. Les largeurs de bande des résonateurs ont été choisies identiques (soit  $\pi/8$ ). Les fréquences centrales des résonateurs ont été réparties linéairement entre 0 et  $\pi$  selon la règle suivante :

$$\omega_m = \frac{(2m-1)\pi}{16} \text{ pour } m=2, \dots, 8 \quad (\text{D.3})$$

La fréquence de coupure du filtre passe-bas  $H_0(s)$  vaut  $\pi/8$ .



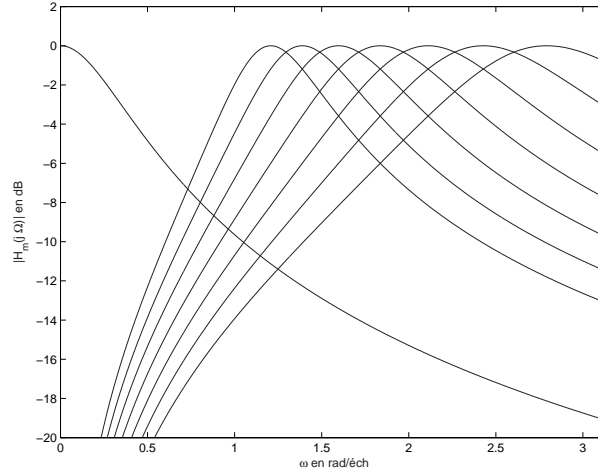
**Fig. D.1** – *Module des fonctions de transfert des filtres du banc d'analyse « Banc1 »*

### Caractéristiques du banc d'analyse « Banc2 »

Le deuxième banc d'analyse « Banc2 » est un banc de type passe-bas à  $M = 8$  voies. Cette fois, les résonateurs ont un facteur de qualité identique  $Q = 2$ . La

fréquence de résonance du dernier résonateur  $H_8(s)$  vaut  $8\pi/9$ . Les autres fréquences sont telles que :

$$\omega_m = \frac{\omega_8}{1.15^{M-m}} \text{ pour } m=2,\dots,7 \quad (\text{D.4})$$

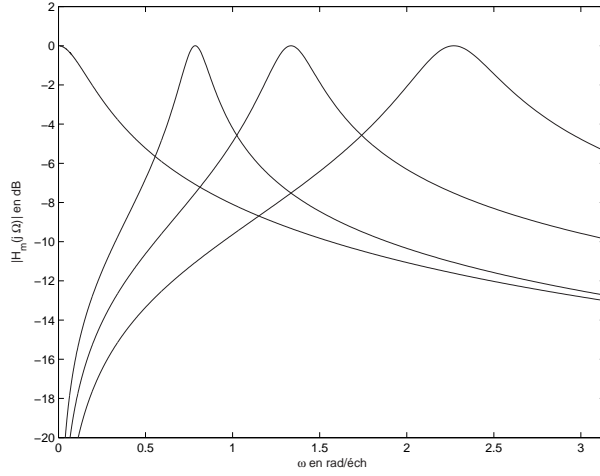


**Fig. D.2** – *Module des fonctions de transfert des filtres du banc d'analyse « Banc2 »*

### Caractéristiques du banc d'analyse « Banc3 »

Le troisième banc d'analyse « Banc3 » est un banc de type passe-bas à  $M = 4$  voies. Le facteur de qualité des résonateurs est  $Q=5$ . La fréquence de coupure du filtre passe-bas est à  $\omega_0 = \pi/4$ . Les fréquences de résonance des résonateurs sont telles que :

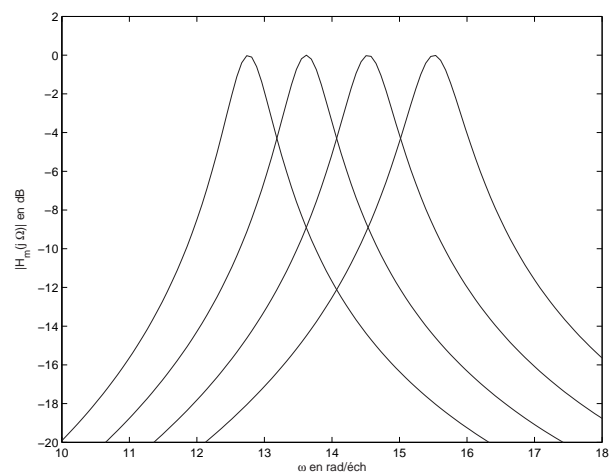
$$\omega_m = \omega_0(1.7)^{m-1} \text{ pour } m=2,3,4 \quad (\text{D.5})$$



**Fig. D.3** — *Module des fonctions de transfert des filtres du banc d'analyse passe-bas « Banc3 »*

### Caractéristiques du banc d'analyse « Banc4 »

Le quatrième banc d'analyse « Banc4 » est un banc de type passe-bande à  $M = 4$  voies, sur la bande  $[4\pi, 5\pi]$ . Il est constitué de quatre résonateurs de facteur de qualité identique ( $Q = 11$ ). Les fréquences centrales des résonateurs ont été réparties uniformément sur une échelle logarithmique. La fréquence centrale du premier filtre est  $\omega_1 = 4\pi$  rad/s. Le quatrième filtre a été placé à l'autre extrémité de la bande,  $\omega_4 = 5\pi$  rad/s. Les deux autres fréquences se déduisent par la règle :  $\omega_m = \omega_{m-1} \cdot (\omega_4/\omega_1)^{1/3}$ .



**Fig. D.4** – *Module des fonctions de transfert des filtres du banc d'analyse passe-bande « Banc4 »*

---

# Abbreviations et notations

Nous présentons ci-après les abbréviations rencontrées dans le manuscrit et les notations les plus souvent utilisées.

AC	Approximation Continue
AGMC	Approximation Globale aux Moindres Carrées
ALMC	Approximation Locale aux Moindres Carrées
BFH	Banc de Filtres Hybrides
CAN	Convertisseur Analogique Numérique
CDMA	Code Division Multiple Access
ET	Entrelacement Temporel
GSM	Global System for Mobile Communications
RII	Réponse Impulsionnelle Infinie
OFDM	Orthogonal Frequency Division Multiplexing
RIF	Réponse Impulsionnelle Finie
UMTS	Universal Mobile Telecommunication System
SNR	Rapport Signal sur Bruit
SFDR	Spurious Free Dynamic Range
UWB	Ultra Wide Band
TFI	Transformée de Fourier Inverse

$\mathbf{A}^T$  Représente la matrice transposée de  $A$

$a^*$  Représente le conjugué de  $a$

$\mathbf{A}^\dagger$  Représente la matrice transposée et conjuguée de  $A$



---

$a_m(n)$	Réponse impulsionnelle de la fonction de transfert du CAN de la branche $m$
$\tilde{a}_m$	Erreur de gain du CAN sur la voie $m$
$b_m(n)$	Décalage du convertisseur de la branche $m$
$\delta(\Omega)$	Distribution Dirac
$\eta_S$	Facteur de sur-échantillonnage (lors de la synthèse du BFH)
$\eta_X$	Facteur de sur-échantillonnage (simple sur-échantillonnage du signal d'entrée)
$d$	Retard introduit par le BFH
$d_m$	Erreur de phase de l'échantillonneur sur la voie $m$
$E\{x\}$	Moyenne statistique de la variable aléatoire $x$
$f_n^{(m)}$	Réponse impulsionnelle du $m$ -ème filtre de synthèse du BFH
$F_m(z)$	Fonctions de transfert des filtres de synthèse pour un banc de filtres discret
$F_m(e^{j\omega})$	Fonctions de transfert des filtres de synthèse pour un BFH
$H_m(z)$	Fonctions de transfert des filtres d'analyse pour un banc de filtres discret
$H_m(s)$	Fonctions de transfert des filtres d'analyse pour un BFH
$m$	Indice représentant une voie d'un BFH
$M$	Nombre de voies d'un BFH
$\omega$	Pulsation du signal discret
$\Omega$	Pulsation signal continu
$q_m$	Quantificateur se trouvant sur la voie $m$ d'un BFH
$x(t)$	Signal continu à échantillonner
$y(n)$	Signal de sortie du BFH
$T$	Période d'échantillonnage du signal continu $x(t)$
$T_0(e^{j\omega})$	Fonction de distorsion
$T_p(e^{j\omega})$	Fonction de repliement d'ordre $p$ , pour $p \neq 0$
$\mathbb{Z}$	L'ensemble des nombres entiers
$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels

# Bibliographie

- [1] F.S. Acton, *Numerical methods that work*, Mathematical Association of America, 1990.
- [2] Agilent, Palo Alto, CA, *GigaSample/second CMOS Current-Mode Parallel-Pipeline ADCs*, October 2004.
- [3] P. Aldebert, *Simulation en régime transitoire des bruits dans les circuits électroniques*, Ph.D. thesis, Université Paris Sud - Orsay, October 1994.
- [4] Analog Devices, Norwood, MA, *AD 12401 Datasheet*, 2005.
- [5] R. Baines, “The DSP Bottleneck,” *IEEE Commun. Mag.*, vol. 33, no. 5, pp. 46–54, May 1995.
- [6] W.C. Black and D.A. Hodges, “Time interleaved converter arrays,” *IEEE Journal on Solid-State Circuits*, vol. SC-15, no. 6, pp. 1022–1029, December 1980.
- [7] S. Ciochina, *Prelucrarea numerica a semnalelor*, Litografia UPB, 1996.
- [8] J.L. Collette, M. Barret, P. Duhamel, and J. Oksman, “On hybrid filter bank A/D converters with arbitrary over-sampling rate,” in *4th International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis*, September 2005, pp. 157–160.
- [9] J.L. Collette, M. Barret, and J. Oksman, “Synthesis of hybrid filter banks for A/D conversion: a frequency domain approach,” in *12th European Signal Processing Conference*, September 2004, pp. 109–112.
- [10] R. F. Cormier, “Wideband analog to digital conversion using bandpass sigma-delta modulator and multirate digital filter bank,” M.S. thesis, Washington State University, 1994.
- [11] R. F. Cormier, T. L. Sculley, and R. H. Bamberger, “Combining subband decomposition and sigma-delta modulation for wideband A/D conversion,” in *Proceedings of IEEE-SP International Symposium on Circuits and Systems*, May 1994, pp. 5357–5360.

- [12] M. Cummings and S. Haruyama, "FPGA in the Software Radio," *IEEE Communications Magazine*, vol. 37, no. 2, pp. 108–112, February 1999.
- [13] J.-E. Eklund and F. Gustafsson, "Digital offset compensation of time-interleaved ADC using random chopper sampling," in *Proceedings of IEEE-SP International Symposium on Circuits and Systems*, May 2000, vol. 3, pp. 447–450.
- [14] A. Eshraghi and T. S. Fiez, "A comparison of three parallel  $\Delta\Sigma$  A/D converters," in *Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, May 1996, vol. 1, pp. 517–520.
- [15] A. Eshraghi and T. S. Fiez, "A time-interleaved parallel  $\Delta\Sigma$  A/D converter," *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 50, no. 3, pp. 118–129, March 2003.
- [16] A. Eshraghi and T. S. Fiez, "A comparative analysis of parallel delta-sigma ADC architectures," *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, vol. 51, no. 3, pp. 450–458, March 2004.
- [17] D. Fu, K. C. Dyer, S. H. Lewis, and P. J. Hurst, "A digital background calibration technique for time-interleaved analog-to-digital converters," *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. 33, no. 12, pp. 1904–1911, December 1998.
- [18] P. M. Furth, "A continuous-time bandpass filter implemented in subthreshold CMOS with large signal stability," in *Proceedings of Midwest Symposium on Circuits and Systems Dedicated to the Memory of Professor Mac Van Valkenburg*, 1998, vol. 1, pp. 264–7.
- [19] I. Galton and H. T. Jensen, "Delta-sigma modulator based A/D conversion without oversampling," *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 42, no. 12, pp. 773–783, December 1995.
- [20] I. Galton and H. T. Jensen, "Oversampling parallel delta-sigma modulator A/D conversion," *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 43, no. 12, pp. 801–810, December 1996.
- [21] S. Görner, A. Potchnikov, and R. Reemtsen, "The direct solution of nonconvex nonlinear FIR filter design problems by a SIP method," *Optimization and Engineering*, vol. 1, no. 2, pp. 123–154, July 2000.
- [22] F. Guilloud, E. Boutillon, and J.L. Danger, "Étude d'un algorithme itératif d'annulation de repliement spectral lors d'une conversion A/N parallèle," in *5ème Journées Nationales du Réseau Doctoral de Microelectronique*, April 2002, vol. 3.

- [23] Y.C. Jenq, "Digital spectra of nonuniformly sampled signals: fundamentals and high-speed waveform digitizers," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 37, no. 2, pp. 245–251, June 1988.
- [24] Y.C. Jenq, "Digital spectra of nonuniformly sampled signals: A robust sampling time offset estimation algorithm for ultra-high speed waveform digitizers using interleaving," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 39, no. 1, pp. 71–75, February 1990.
- [25] H. Jin and K. F. Lee, "A digital-background calibration technique for minimizing timing-error effects in time-interleaved ADCs," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*, vol. 47, no. 7, pp. 603–613, July 2000.
- [26] J. L. Brown Jr., "Multi-channel sampling of low-pass signals," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. CAS-28, no. 2, pp. 101–106, February 1981.
- [27] R. Khoini-Poorfard, "Mismatch effects in time-interleaved oversampling converters," in *Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, May 1994, pp. 429–432.
- [28] R. Khoini-Poorfard and D. A. Johns, "Time-interleaved oversampling converters," *IEE Electronic Letters*, vol. 29, no. 19, pp. 1673–1674, September 1993.
- [29] E. T. King, A. Eshraghi, I. Galton, and T. S. Fiez, "A Nyquist-rate delta-sigma A/D converter," *IEEE Journal of Solid State Circuits*, vol. 33, no. 1, pp. 45–52, January 1998.
- [30] G. T. A. Kovacs, *Micromachined Transducers Sourcebook*, Mac Graw Hill, 1998.
- [31] N. Kurosawa, "Explicit analysis of channel mismatch effects in time-interleaved ADC systems," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, vol. 48, no. 3, pp. 261–271, March 2001.
- [32] J. C. Lagarias, J. A. Reeds, M. H. Wright, and P. E. Wright, "Convergence properties of the Nelder - Mead simplex algorithm in low dimensions," Tech. Rep., Bell Laboratories, 1997.
- [33] E. Lahalle, D. Poulton, and J. Oksman, "CAR identification from non-uniformly sampled values using LMS," in *IEEE International Midwest Symposium on Circuits and Systems*, 2005.
- [34] L.E. Larson, "High-speed analog-to-digital conversion with GaAs technology: prospects, trends and obstacles," in *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, 1988, vol. 3, pp. 2871–8.

- [35] C. Lelandais-Perrault, D. Poulton, and J. Oksman, "Synthesis of hybrid filter banks for A/D conversion with implementation constraints - direct approach," in *Proceedings of IEEE Midwest Symposium on Circuits and Systems*, December 2003.
- [36] C. Lelandais-Perrault, D. Poulton, and J. Oksman, "Band-pass hybrid filter bank A/D converters with software-controlled bandwidth and resolution," in *Proceedings of IEEE European Conference on Circuit Theory and Design*, August 2005, vol. I, pp. 51–54.
- [37] C. Lelandais-Perrault, D. Sillion, T. Petrescu, and D. Poulton, "Hybrid filter banks A/D converters using IIR synthesis filters," in *Proceedings of IEEE Midwest Symposium on Circuits and Systems*, August 2005.
- [38] M. Looney, "Advanced digital post-processing techniques enhance performance in time-interleaved ADC systems," *Analog Dialogue*, vol. 37, no. 8, August 2003.
- [39] P. Löwenborg, *Analysis and Synthesis of Asymmetric Filter Banks with Application to Analog-to-Digital Conversion*, Ph.D. thesis, Institute of Technology Linköpings University, May 2001.
- [40] P. Löwenborg and H. Johansson, "Quantization noise in filter bank analog-to-digital converters," in *Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, May 2001, vol. 2, pp. 601–604.
- [41] P. Löwenborg, H. Johansson, and L. Wanhammar, "A class of two-channel hybrid analog/digital filter banks," in *Proceedings of IEEE Midwest Symposium on Circuits and Systems*, August 1999, vol. 1, pp. 14–17.
- [42] P. Löwenborg, H. Johansson, and L. Wanhammar, "On the frequency response of  $M$ -channel mixed analog and digital maximally decimated filter banks," in *Proceedings of European Conference on Circuit Theory and Design*, September 1999, vol. 1, pp. 321–324.
- [43] P. Löwenborg, H. Johansson, and L. Wanhammar, "A class of two-channel approximately perfect reconstruction hybrid analog/digital filter banks," in *Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, May 2000, vol. 1, pp. 579–582.
- [44] P. Löwenborg, H. Johansson, and L. Wanhammar, "A class of two-channel hybrid analog/digital filter banks," in *Proceedings of European Signal Processing Conference*, September 2000, vol. 1.

- [45] P. Löwenborg, H. Johansson, and L. Wanhammar, "A two-channel hybrid analog and IIR filter bank approximating perfect magnitude reconstruction," in *Proceedings of IEEE Nordic Signal Processing Symposium*, June 2000, vol. 1.
- [46] P. Löwenborg, H. Johansson, and L. Wanhammar, "Analysis of gain and timeskew errors in filter bank based A/D converters," in *Proceedings of IEEE Midwest Symposium on Circuits and Systems*, August 2001.
- [47] P. Löwenborg, H. Johansson, and L. Wanhammar, "Two-channel digital and hybrid analog/digital multirate filter banks with very low-complexity analysis or synthesis filters," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*, vol. 50, no. 7, pp. 355–367, July 2003.
- [48] A. Mateescu, S. Ciochina, N. Dumitriu, A. Serbanescu, and L. Stanciu, *Prelucrarea numerica a semnalelor*, Editura Tehnica, 1997.
- [49] A. Mateescu, N. Dumitriu, and L. Stanciu, *Semnale si sisteme - Aplicatii în filtrarea semnalelor*, Teora, 2001.
- [50] Mathworks, Nattick, MA, *Matlab Optimization Toolbox*.
- [51] Maxim, Sunnyvale, CA, *Understanding Flash ADCs*, October 2001.
- [52] R. Mina and J-F. Naviner, "Filtrage RF pour les terminaux mobiles et impact de l'évolution de la technologie CMOS sur les circuits RF," in *Présentation - séminaires du groupe SIAM - Telecom Paris, Comelec*.
- [53] J. Mitola, "Software radios-survey, critical evaluation and future directions," in *National Telesystems Conference*, May 1992, pp. 13/15–23.
- [54] J. Mitola, "The software radio architecture," *IEEE Commun. Mag.*, vol. 33, no. 5, pp. 26–37, August 1995.
- [55] J. Mitola and G. Maguire, "Cognitive Radio: Making Software Radios More Personal," *IEEE Personal Commun. Mag.*, vol. 6, no. 4, pp. 13–18, August 1999.
- [56] J.J. Moré and D.C. Sorensen, "Computing a trust region step," *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, vol. 3, pp. 553–572, 1983.
- [57] C. D. Motchenbacher and J. A. Connely, *Low-Noise Electronic System Design*, Wiley-Interscience, 1993.
- [58] O. Oliaei, "Asymptotically perfect reconstruction in hybrid filter banks," in *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, May 1998, vol. 3, pp. 1829 – 1832.

- [59] O. Oliaei, "High-speed A/D and D/A converters using hybrid filter banks," in *Proceedings of IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems*, September 1998, vol. 1, pp. 143–146.
- [60] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, and J. R. Buck, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice Hall, 1999.
- [61] A. Papoulis, "Generalized sampling expansion," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 24, pp. 652–654, November 1977.
- [62] A. Petraglia and S. K. Mitra, "Analysis of mismatch effects among A/D converters in a time-interleaved waveform digitizer," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 40, no. 5, pp. 831–835, October 1991.
- [63] A. Petraglia and S. K. Mitra, "High speed A/D conversion incorporating a QMF bank," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 41, pp. 427–431, June 1992.
- [64] A. Petraglia and M. A. A. Pinheiro, "Effects of quantization noise in parallel arrays of analog-to-digital converters," in *Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, May 1994, vol. 5, pp. 337–340.
- [65] T. Petrescu, C. Lelandais-Perrault, and J. Oksman, "Synthesis of hybrid filter banks for A/D conversion with implementation constraints - mixed distortion/aliasing optimization -," in *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, May 2004, vol. 2, pp. 997–1000.
- [66] T. Petrescu and J. Oksman, "Synthesis of hybrid filter banks for A/D conversion with implementation constraints -optimized frequency response approach-," in *Proceedings of IEEE Midwest Symposium for Circuits and Systems*, December 2003.
- [67] T. Petrescu and J. Oksman, "Sensitivity of hybrid filter banks A/D converters to analog realization errors and finite word length," in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, May 2006.
- [68] T. Petrescu, J. Oksman, and P. Duhamel, "Synthesis of hybrid filter banks by global frequency domain least square solving," in *Proceedings of IEEE International Conference on Circuits and Systems*, May 2005.
- [69] M. A. A. Pinheiro, P. B. Batalheiro, A. Petraglia, and M. R. Petraglia, "Improving the near-perfect hybrid filter bank performance in the presence of realiza-



- tion errors,” in *Proceedings of IEEE-SP International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, May 2001, vol. 2, pp. 1069–1072.
- [70] M. A. A. Pinheiro and A. Petraglia, “On the performance of discrete-time hybrid filter banks with coefficient errors and arma stochastic process input,” in *Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, May 2004, vol. 3, pp. 521–524.
- [71] K. Poulton, J.J. Corcoran, and T. Hornak, “A 1-Ghz 6-bit ADC system,” *IEEE J. Solid-State Circuits*, pp. 1781–1789, December 1987.
- [72] K. Poulton, R. Neff, B. Stterberg, B. Wuppermann, T. Kopley, R. Jewett, J. Pernillo, C. Tan, and A. Montijo, “A 20 GS/s 8 b ADC with a 1 MB memory in 0.18  $\mu$ m CMOS,” in *Proceedings of IEEE International Solid-State Circuits Conference*, February 2003, vol. 1, pp. 318–319, 496.
- [73] W. H. Press, S. A. Reukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, 1994.
- [74] S. Razafimandimby, C. Tilhac, A. Kaiser, A. Cathelin, and D. Belot, “Nouvelle configuration de filtre RF accordable en fréquence utilisant des résonateurs BAW pour une chaîne de réception homodyne WCDMA,” in *TAISA 2005*, October 2005, pp. 99–106.
- [75] P. Regalia, “Comments on ”A Weighted Least-Squares Method for the Design of Stable 1-D and 2-D IIR Digital Filters”,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 47, no. 7, pp. 2063–2065, July 1999.
- [76] V.P. Sathe and P.P. Vaidyanathan, “Effects of multirate systems on the statistical properties of random signals,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 1, pp. 131–146, January 1993.
- [77] H. Shu, T. Chen, and B. A. Francis, “Minmax design of hybrid multirate filter banks,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 44, no. 2, pp. 120–128, February 1997.
- [78] J. Stoer and R. Bulirsch, *Introduction to numerical analysis*, Springer-Verlag, 1980.
- [79] G. Strang, *Linear algebra and its applications*, Academic Press, Orlando, second edition, 1980.
- [80] Texas Instruments, Fort Worth, TX, *ADS5500 Characterization*, November 2003.



- [81] Texas Instruments, Fort Worth, TX, *Data Converter Selection Guide*, September 2005.
- [82] C. Toumazou and D. G. Haigh, "Integrated microwave continuous-time active filter using fully tunable GaAs transconductors," in *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, June 1991, vol. 3, pp. 1765–1768.
- [83] W. H. W. Tuttlebee, "Software-Defined Radio: Facets of a Developing Technology," *IEEE Personal Communications Magazine*, vol. 6, no. 2, pp. 38–44, April 1999.
- [84] P. P. Vaidyanathan, *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1993.
- [85] P. P. Vaidyanathan and V.C. Liu, "Classical sampling theorems in the context of multirate and polyphase digital filter bank structures," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 36, no. 9, pp. 1480–1495, September 1988.
- [86] R.G. Vaughan, N.L. Scott, and D.R. White, "The theory of bandpass sampling," vol. 39, no. 9, pp. 1973–84, September 1991.
- [87] S. R. Velazquez, "Adaptive parallel processing analog and digital converter," in *Patent No.: US 6,339,390 B1. Jan. 15, 2002*.
- [88] S. R. Velazquez, "Hybrid filter bank analog/digital converter," in *Patent No.: US 5,568,142. Oct. 22, 1996*.
- [89] S. R. Velazquez, "Parallel processing analog and digital converter," in *Patent No.: US 6,177,893. Jan. 23, 2001*.
- [90] S. R. Velazquez, *Hybrid filter banks for analog/digital conversion*, Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, June 1997.
- [91] S. R. Velazquez, "High-performance advanced filter bank analog-to-digital converter for universal RF receivers," in *Proceedings of IEEE International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, October 1998, pp. 229–232.
- [92] S. R. Velazquez, T. Q. Nguyen, and S. R. Broadstone, "Design of hybrid filter banks for analog/digital conversion," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, no. 4, pp. 956–967, April 1998.
- [93] S. R. Velazquez, T. Q. Nguyen, S. R. Broadstone, and J. K. Roberge, "A hybrid filter bank approach to analog to digital conversion," in *Proceedings of IEEE*

- International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, October 1994, pp. 116–119.
- [94] C. Vogel, “Comprehensive error analysis of combined channel mismatch effects in time-interleaved ADCs,” in *Proceedings of the 20th IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference*, May 2003, vol. 1, pp. 733–738.
- [95] R. H. Walden, “Analog-to-Digital Converter Survey and Analysis,” *IEEE Journal on selected areas in communications*, vol. 17, no. 4, pp. 530–550, April 1999.
- [96] J. A. Wepman, “Analog-to-digital converters and their applications in radio receivers,” *IEEE Commun. Mag.*, vol. 33, pp. 39–45, May 1995.
- [97] C.E. Woodward, K. H. Konkle, and M. L. Naiman, “A monolithic voltage-comparator array for A/D converters,” *IEEE J. Solid-State Circuits*, , no. 6, pp. 392–399, December 1975.
- [98] K. C. Zangi and R. D. Koilpillai, “Software radio issues in cellular base stations,” *IEEE Journal on selected areas in communications*, vol. 17, no. 4, pp. 561–573, April 1999.

## Résumé

Ce travail avait pour objectif d'étudier un dispositif qui, pour une cadence d'échantillonnage donnée, permette d'élargir la bande de fréquence de conversion analogique/numérique. L'orientation choisie est celle des structures parallèles et en particulier des bancs de filtres hybrides (BFH). Nous avons proposé certaines méthodes de synthèse des BFH. Leur particularité est qu'elles prennent en compte les contraintes de réalisation des filtres analogiques. Diverses améliorations de ces méthodes en particulier leur optimisation vis-à-vis de certains paramètres ont été proposées. Le bruit de quantification a été étudié et nous avons montré par un calcul théorique mais aussi en simulation l'influence sur la sortie du bruit de quantification du quantificateur de chaque voie. Ensuite, nous avons étudié les effets de la quantification des coefficients des filtres de synthèse. Une formule théorique qui estime le bruit introduit par la quantification de ces coefficients a été déduite. Des simulations qui confirment la validité de cette formule ont été effectuées. Le caractère hybride des bancs de filtres étudiés implique des problèmes spécifiques liés à l'implémentation analogique. Nous avons ainsi montré que de très petites variations des valeurs des composants analogiques par rapport aux valeurs nominales obtenues après la synthèse détériorent gravement les performances du banc de filtres. Nous avons alors proposé une solution originale à ce problème. Il s'agit d'une calibration du banc de filtres après réalisation.

## Mots clés

Conversion analogique/numérique - Bancs de filtres hybrides - Bruit de quantification - Nombre fini de bit - Sensibilité aux imperfections analogiques - Sur-échantillonnage - Calibration - Contraintes d'implémentation

# Abstract

This PhD thesis deals with a technique allowing to increase the speed of Analog to Digital Converters (ADC). Parallel structures together with Hybrid Filter Banks (HFB) were designed. Synthesis methods of HFB that take into account analog filters implementation constraints were conceived. Some optimization methods of the synthesis procedures were also proposed. The effect of the quantization noise of a branch quantizer on the HFB output was studied through theoretical estimations strengthened by simulations. The effect of finite word implementation of synthesis filters coefficients was also studied. A theoretical estimation of the noise introduced by coefficient quantization was given. Simulations confirming this theoretical estimation were performed. The hybrid nature of HFB generates analog implementation problems. One of the most important challenges in designing HFB was identified: the dramatic performance degradation in the presence of small analog filters implementation errors. Consequently, readjustment of synthesis filters coefficients after physical implementation of the analysis bank appears as mandatory and a calibration method was also proposed.

## Key words

Analog/digital conversion - Hybrid filter banks - Quantization noise - Quantization effects - Analog imprecisions sensitivity - Oversampling - Calibration - Realization constraints